PROGRAMME DU COURS "GROUPOÏDE DE MALGRANGE – EXEMPLES ET APPLICATIONS" PAR GUY CASALE

THÉORIES GALOISIENNES ET ARITHMÉTIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CIRM, 21-25 SEPTEMBRE 2009

Le but de ce cours est d'expliquer comment le groupoïde de Malgrange naturellement associé à un système dynamique sur $\mathbb{C}$ (équation différentielle, aux différences, ...) contient un certain nombre d'information sur ce système, son *intégrabilité*, sa *solvabilité* et sa *réductibilité*. Pour cela nous expliquerons comment les notions et théorèmes classiques sur les groupes algébriques complexes se traduisent sur les groupoïdes de Lie au sens de [7]. Un certain nombre d'applications seront ensuite présentées notamment les calculs des groupoïdes de Malgrange des équations de Painlevé.

: *Introduction et définitions :*
Le problème de la réductibilité d'une équation différentielle [9, 8, 11]
Premier exemples de pseudogroupes et de groupoïdes ; espaces de jets de transformations : J^*
Sous-groupoïdes de Lie algébriques de J^* et leurs "algèbres(oïdes) de Lie' [6, 10]
⇒ Absence de troisième théorème de Lie dans ce contexte.
Définition de la $\mathcal{D}$-enveloppe de Malgrange d'une algèbre(oïde) de Lie de champs de vecteurs [7]
Deux exemples :
– une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique
– le feuilletage d'une équation différentielle linéaire
⇒ Le groupoïde de Malgrange généralise le groupe de Galois différentiel.

: *Comment décrire un sous-groupoïde de J^* ? :*
Invariants différentiels (théorème de Kolchin-Chevalley pour ce type de groupoïde)
Formes de Maurer-Cartan et Équations de structures
Le cas du groupoïde de Malgrange d'une équation différentielle
⇒ Suites de Godbillon-Vey (ou Gelfand-Fuchs) et structure transverse
⇒ Calcul du groupoïde de Malgrange : équations résolvantes

: *Quelles informations contient le groupoide de Malgrange ? :*
Un théorème de Jordan-Holder
Le groupoïde d'une fonction liouvillienne
⇒ Un théorème de Khovanskii [5]
Le groupoïde d'une équation réductible
⇒ 1ère et 6ème équations de Painlevé [1, 2, 3]
Exemple de ce que le groupoide de Malgrange ne voit pas :
Solutions algébriques / Solutions de Picard de P_6 [4]

: Suivant l'avancement de mon travail et du cours :
Intégrabilité et Réductibilité des équations aux (q-)différences :
⇒ équations de Painlevé discrètes

Date: 2 juin 2008.

Références

[1] Serge Cantat & Franck Loray – *Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and Character Varieties*, arXiv :0711.1579.

[2] Guy Casale – *Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité* to appear in Commentarii Mathematici Helvetici.

[3] – *Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la 1ère équation de Painlevé* submitted (2007).

[4] – *The Galois groupoid of Picard-Painlevé sixth equation* Proceedings of the French-Japanese Conference Algebraic, Analytic and Geometric Aspect of Complex Differential Equations and their Deformations. Painlevé Hierarchies. RIMS Kékyéroku Bessatsu vol B2 (2007).

[5] Askold Georgievich Khovanskii – *Topological obstructions to the representability of functions by quadratures*, J. Dyn. Control Syst. **1**, No.**1** (1995) 91–123.

[6] Antonio Kumpera & Donald Spencer – *Lie Equations*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press (1972).

[7] Bernard Malgrange – *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001).

[8] Keiji Nishioka – *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. J. **109** (1988) 63–67.

[9] Paul Painlevé – *Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation* $y_{xx} = 6y^2 + x$, C.R. Acad. Sci. Paris **135** (1902) 641–647.

[10] Jean-François Pommaret – *Differential Galois Theory*, Mathematics and its applications, vol **15** Gordon & Breach Sci. Publishers (1983).

[11] Hiroshi Umemura - *On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé*, Alg. Geom. and Com. Alg. in honor of M. Nagata (1987) 771–789.