

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS AUX  
 $q$ -DIFFÉRENCES LINÉAIRES COMPLEXES: LE CAS OÙ  
 $|q| \neq 1$

J. Sauloy<sup>1</sup>

Micro-cours au CIRM, Théories galoisiennes et arithmétiques des équations  
différentielles, 21-25 septembre 2009

1. Institut mathématique de Toulouse et U.F.R. M.I.G., Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne,  
31062 Toulouse CEDEX 4, email: sauloy@math.univ-toulouse.fr

## Résumé

On expose ici les méthodes élémentaires (*i.e.*, qui ne font pas intervenir le phénomène de Stokes) dans la classification locale des équations aux  $q$ -différences linéaires complexes. Ce cours doit servir de préparation au cours de Lucia Di Vizio sur le cas (plus subtil) où  $|q| = 1$ .

Oublis intentionnels notables :

- Formalisme de la filtration par les pentes de Yves André ;
- construction d'un système fondamental de solutions locales ;
- existence d'un système fondamental de solutions méromorphes ;
- croissance des solutions (cas fuchsien, cas  $q$ -Gevrey) ;
- confluence ;
- “vraie” classification analytique (avec Stokes) ;
- théorie de Galois ;
- problèmes globaux (sur  $\mathbf{C}(z)$ ).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>En guise de motivation : quelques exemples historiques élémentaires</b>	<b>4</b>
1.1	Exemples réguliers et fuchsien . . . . .	5
1.1.1	Le $q$ -calcul d'Euler et le "paramètre supplémentaire" . . . . .	5
1.1.2	Le théorème $q$ -binomial de Cauchy [13, chap 1.3] . . . . .	6
1.1.3	Les fonctions hypergéométriques basiques de Heine [13, chap 1.2] . . . . .	7
1.2	Exemples irréguliers . . . . .	8
1.2.1	Les $q$ -analogues de la série d'Euler . . . . .	8
1.2.2	Séries hypergéométriques basiques "confluentes" . . . . .	9
1.3	Classification des équations de rang 1 . . . . .	10
1.3.1	Sur un corps quelconque . . . . .	10
1.3.2	Sur le corps $\mathbf{C}((z))$ . . . . .	11
1.3.3	Sur le corps $\mathbf{C}(\{z\})$ . . . . .	12
1.3.4	Sur le corps $\mathbf{C}(z)$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Opérateurs et équations</b>	<b>13</b>
2.1	L'anneau de Ore-Laurent $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ . . . . .	13
2.1.1	Degré absolu, inversibles, équivalence . . . . .	14
2.1.2	Division euclidienne, idéaux à gauche . . . . .	15
2.1.3	Extension du corps de base . . . . .	16
2.1.4	Conjugaison (ou transformation de jauge) . . . . .	16
2.2	Le polygone de Newton . . . . .	17
2.2.1	Valuations tordues, formes initiales, additivité de la fonction de Newton . . . . .	17
2.2.2	Comportement de la fonction de Newton par extension . . . . .	18
2.2.3	Comportement de la fonction de Newton par conjugaison . . . . .	18
2.3	Résolution et factorisation formelles . . . . .	19
2.3.1	Équation caractéristique et solutions . . . . .	19
2.3.2	Factorisation formelle . . . . .	21
2.4	Résolution et factorisation analytiques . . . . .	22
2.4.1	Le lemme d'Adams . . . . .	22
2.4.2	Factorisation analytique . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Systèmes et modules</b>	<b>25</b>
3.1	Modules aux différences . . . . .	25
3.1.1	Équations, systèmes, modules, morphismes . . . . .	25
3.1.2	Abélianité . . . . .	27

3.2	Relation avec les $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -modules . . . . .	28
3.2.1	$\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -modules à gauche de longueur finie . . . . .	28
3.2.2	Le lemme du vecteur cyclique . . . . .	29
3.3	Le polygone de Newton d'un module aux $q$ -différences . . . . .	30
3.3.1	Le polygone de Newton est un invariant formel . . . . .	30
3.3.2	Propriétés abéliennes et conséquences . . . . .	31
3.3.3	Existence de sous-modules purs . . . . .	31
3.3.4	Exercices d'application . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Modules fuchsien et modules purs</b>	<b>33</b>
4.1	Caractérisation des modules fuchsien . . . . .	33
4.1.1	Trois caractérisations équivalentes . . . . .	33
4.1.2	Le "lemme fondamental" . . . . .	34
4.2	Classifications formelle et analytique des modules fuchsien . . . . .	36
4.2.1	Classification formelle = classification analytique . . . . .	36
4.2.2	Quatre catégories équivalentes . . . . .	37
4.3	Classifications formelle et analytique des modules purs . . . . .	37
4.3.1	Modules purs isoclines de pente entière . . . . .	37
4.3.2	Modules purs isoclines arbitraires . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Modules irréguliers</b>	<b>41</b>
5.1	Classification formelle . . . . .	41
5.1.1	Graduation canonique et stricte functorialité . . . . .	41
5.1.2	Classification . . . . .	41
5.2	Classification analytique . . . . .	41
5.2.1	Filtration canonique et stricte functorialité, exactitude de $gr$ . . . . .	41
5.2.2	Classes analytiques dans une classe formelle vs classes analytiques isoformelles . . . . .	41
5.3	Forme normale de Birkhoff-Guenter . . . . .	41
5.3.1	$q$ -Borel et la forme normale . . . . .	41
5.3.2	Exemple : $q$ -Euler . . . . .	41

# Chapitre 1

## En guise de motivation : quelques exemples historiques élémentaires

Ce chapitre a un rôle introductif, presque culturel : il sert essentiellement à motiver le cours. En filigrane, la comparaison avec la théorie “classique” des équations différentielles linéaires analytiques sur  $\mathbf{C}$  devrait servir de fil d’Ariane. On peut utilement le compléter par la lecture de l’article de survol<sup>1</sup> [10].

Nous ferons appel aux notations standard du “ $q$ -calcul” :

$$(a; q)_n := \prod_{0 \leq i < n} (1 - aq^i),$$
$$(a; q)_\infty := \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i).$$

La première formule est définie pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $a, q \in \mathbf{C}$ , mais nous supposons *toujours* que  $q \in \mathbf{C}^*$ . En fait, nous supposons presque toujours que  $q$  n’est pas non plus racine de l’unité ; et nous distinguerons fréquemment le cas  $|q| = 1$  du cas  $|q| \neq 1$ .

On a la relation de récurrence :

$$(a; q)_n = (1 - a)(aq; q)_{n-1}.$$

Cette relation permet d’étendre la définition de  $(a; q)_n$  à tout  $n \in \mathbf{Z}$  (avec, bien entendu, des conditions supplémentaires sur  $a$  et  $q$ ). On vérifie alors dans tous les cas l’égalité :

$$(a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty}.$$

Le produit infini  $(a; q)_\infty$  ne converge dans  $\mathbf{C}$  que si  $a = 0$  ou  $|q| < 1$ . (Cependant, considéré comme *série formelle* en  $q$ , il est défini inconditionnellement.)

**Exercice 1.0.1** Donner une expression explicite de  $(a; q)_n$  lorsque  $n < 0$ .

---

1. Voir aussi le chapitre “Combinatoire avancée” (*sic*) du livre de L3 dirigé par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, à paraître chez De Boeck cette rentrée. (Ce chapitre a été commis par le rédacteur.)

**Exercice 1.0.2** Déterminer récursivement les coefficients de la série formelle  $(a; q)_\infty \in \mathbf{C}[[q]]$ .

*Indication* : en dérivant logarithmiquement, on se ramène à une “série de Lambert”  $\sum \frac{aq^n}{1-aq^n}$  dont le développement en série formelle s’exprime sans peine.

## 1.1 Exemples réguliers et fuchsien

### 1.1.1 Le $q$ -calcul d’Euler et le “paramètre supplémentaire”

Soit  $p(n)$  le nombre de partitions de l’entier  $n \in \mathbf{N}$  (voir par exemple [14, chap XIX]). En 1748, Euler a déterminé la série génératrice de ces nombres :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_\infty} = \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^n) \cdots}.$$

Cette série entière en  $q^2$  a pour rayon de convergence 1 et des singularités en tous les points du cercle unité. Euler a démontré de nombreuses formules extraordinaires, dont celle-ci :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{(q; q)_n} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{(1-q) \cdots (1-q^n)}.$$

Pour cette dernière, il a inventé la *ruse fondamentale*, l’introduction d’un paramètre supplémentaire ; on pose :

$$f(z) := \frac{1}{(z; q)_\infty} = \frac{1}{(1-z)(1-qz) \cdots (1-q^n z) \cdots}.$$

Pour  $q$  fixé tel que  $|q| < 1$ , c’est une fonction analytique de  $z$  pour  $|z| < 1$ , telle que  $f(0) = 1$  et vérifiant l’équation aux  $q$ -différences :

$$f(qz) = (1-z)f(z).$$

Ces conditions suffisent à déterminer le développement en série entière  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  ; en effet, elles se traduisent par les relations :

$$f_0 = 1 \text{ et } q^n f_n = f_n - f_{n-1} \implies f_n = \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^n)} = \frac{1}{(q; q)_n}.$$

On a donc, pour  $|z| < 1$  :

$$\frac{1}{(z; q)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(q; q)_n} z^n,$$

d’où la formule d’Euler en prenant  $z := q$ . Il ne semble pas facile de démontrer cette formule sans l’introduction du paramètre supplémentaire !

**Exercice 1.1.1** On suppose que  $|q| \neq 1$ . Démontrer la formule valable dans  $\mathbf{C}\{z\}$  :

$$(z; q)_\infty = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} z^n.$$

Préciser le rayon de convergence de cette série.

---

2. À ma connaissance, l’usage de la lettre  $q$  dans ce genre de calcul remonte à Jacobi. Le lien avec la lettre  $q$  des déformations quantiques est donc dû à un heureux hasard ! Ce qui est certain, c’est que le lien établi par Jacobi entre la fonction  $\sum p(n)q^n$  et la théorie des fonctions elliptiques a eu une influence favorable sur l’avenir du  $q$ -calcul.

### 1.1.2 Le théorème $q$ -binomial de Cauchy [13, chap 1.3]

Le théorème du binôme généralisé de Newton peut être écrit sous la forme suivante :

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n, \text{ où } (\alpha)_n := \prod_{0 \leq i < n} (\alpha + i).$$

Sa preuve la plus simple (peut-être la seule ?) consiste à vérifier que les deux membres sont solutions de l'équation différentielle  $f' = \frac{\alpha}{1-z} f$ . Pour le membre droit, cela découle de la relation de récurrence entre ses coefficients  $f_n : \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\alpha+n}{n+1} \implies (n+1)f_{n+1} = (\alpha+n)f_n$ .

En 1843, Cauchy a évalué le “ $q$ -analogue” suivant du membre droit (on suppose  $|q| < 1$ ) :

$$\phi_q(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} z^n.$$

Pour quelle raison est-ce un  $q$ -analogue ? Par exemple, parce qu'en posant  $a := q^\alpha$ , on vérifie que :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}.$$

(Naturellement, il faut un peu de soin pour préciser ce que l'on entend ici par  $q^\alpha$ , s'agissant de nombres complexes !) On peut donc voir la famille des  $\phi_q(z)$  comme une déformation de paramètre  $q$  de la fonction  $(1-z)^{-\alpha}$ . La méthode la plus simple pour évaluer la série  $\phi_q$  est de convertir la relation de récurrence entre ses coefficients  $f_n$  en une équation fonctionnelle :

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}} \implies (1-q^{n+1})f_{n+1} = (1-aq^n)f_n \implies f(z) - f(qz) = z(f(z) - af(qz)).$$

(La dernière relation s'obtient en multipliant la précédente par  $z^{n+1}$  et en sommant pour  $n \in \mathbf{N}$ .) On a donc l'équation aux  $q$ -différences d'ordre 1 :

$$f(qz) = \frac{1-z}{1-az} f(z) \iff f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz).$$

La deuxième forme nous intéresse parce que l'on peut l'itérer :

$$f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz) = \frac{1-az}{1-z} \frac{1-aqz}{1-qz} f(q^2z) = \dots = \frac{1-az}{1-z} \frac{1-aqz}{1-qz} \frac{1-aq^2z}{1-q^2z} \dots f(0).$$

On obtient ainsi le théorème  $q$ -binomial de Cauchy :

$$\frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} z^n.$$

**Remarque 1.1.2** L'équation aux  $q$ -différences peut s'écrire :

$$\frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} = \frac{a-1}{q-1} \frac{1}{1-az} f(z).$$

Lorsque  $q \rightarrow 1$ , avec bien entendu  $a := q^\alpha$ , le membre gauche tend vers  $f'$  et le membre droit vers  $\frac{\alpha}{1-z} f$ . (On ne fait pas bouger  $f$  dans cet argument heuristique.) L'équation aux  $q$ -différences peut donc être vue comme une  $q$ -déformation de l'équation différentielle.

**Exercice 1.1.3** Sous l'hypothèse  $a := q^\alpha$ , calculer directement  $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty}$ .



### 1.1.3 Les fonctions hypergéométriques basiques de Heine [13, chap 1.2]

À partir de 1846, Heine a commencé à systématiser l'usage de la  $q$ -analogie  $\frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} \leftrightarrow \frac{(\alpha)_n}{n!}$ , laquelle repose sur le passage à la limite  $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^\alpha - 1}{q - 1} = \alpha$ . Sa principale découverte est une  $q$ -déformation de la série hypergéométrique  $F(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n$  de Gauß. Heine définit ainsi la série hypergéométrique *basique* (l'adjectif fait référence à la base  $q$ ) :

$$\Phi(a, b; c; q, z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(c; q)_n (q; q)_n} z^n.$$

Pour des valeurs génériques de  $a, b, c \in \mathbf{C}^*$ , cette série a pour rayon de convergence 1. Sous l'hypothèse  $a := q^\alpha$ ,  $b := q^\beta$ ,  $c := q^\gamma$ , ses coefficients tendent vers ceux de  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  lorsque  $q \rightarrow 1$ . Noter que, lorsque  $\beta = \gamma$ , resp. lorsque  $b = c$ , on retrouve la série du binôme de Newton, resp. la série  $q$ -binomiale de Cauchy.

La série hypergéométrique classique est célèbre par suite de son rôle central dans la théorie des équations différentielles complexes. (Son étude par Riemann est à l'origine de la correspondance de Riemann-Hilbert.) La série hypergéométrique basique est solution d'une équation fonctionnelle, que l'on trouve simplement à partir de la relation de récurrence entre ses coefficients :

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{(1 - aq^n)(1 - bq^n)}{(1 - cq^n)(1 - q^{n+1})} \implies (1 - cq^n)(1 - q^{n+1})f_{n+1} = (1 - aq^n)(1 - bq^n)f_n \\ &\implies \left(1 - \left(\frac{c}{q} + 1\right)q^{n+1} + \frac{c}{q}q^{2n+2}\right)f_{n+1} = \left(1 - (a+b)q^n + abq^{2n}\right)f_n. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin, introduisons la notation :

$$\sigma_q f(z) := f(qz).$$

On trouve alors l'équation aux  $q$ -différences d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{c}{q} + 1\right)\sigma_q + \frac{c}{q}\sigma_q^2\right)f &= z\left(1 - (a+b)\sigma_q + ab\sigma_q^2\right)f \implies \\ \left(\frac{c}{q} - abz\right)\sigma_q^2 f - \left(\left(\frac{c}{q} + 1\right) - (a+b)z\right)\sigma_q f &+ (1 - z)f = 0. \end{aligned}$$

Pour voir en quoi cette équation aux  $q$ -différences est une  $q$ -déformation de l'équation différentielle hypergéométrique, on procède ainsi<sup>3</sup>. Notons :

$$\delta_q := \frac{\sigma_q - 1}{q - 1} \text{ l'opérateur de "q-dérivation" } f(z) \mapsto \frac{f(qz) - f(z)}{q - 1}.$$

En un sens intuitif,  $\delta_q$  dégénère, lorsque  $q \rightarrow 1$ , en l'opérateur de dérivation  $\delta := z \frac{d}{dz}$ , défini par  $f(z) \mapsto z f'(z)$ . Dans l'équation aux  $q$ -différences ci-dessus, on peut remplacer  $\sigma_q$  par  $1 + (q - 1)\delta_q$  (ici, 1 désigne simplement l'opérateur identité  $f(z) \mapsto f(z)$ ). Si l'on fait ensuite l'hypothèse  $a := q^\alpha$ ,  $b := q^\beta$ ,  $c := q^\gamma$ , puis  $q \rightarrow 1$  et que l'on remplace  $\delta_q$  par  $\delta$ , on obtient une équation différentielle d'ordre 2. (Il peut y avoir lieu de simplifier par  $q - 1$  avant de passer à la limite.)

3. La théorie des  $q$ -déformations des équations différentielles fuchsienues est exposée dans [23] et appliquée aux séries hypergéométriques basiques.

**Exercice 1.1.4** Vérifier que c'est bien l'équation différentielle hypergéométrique satisfaite par  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ .

## 1.2 Exemples irréguliers

Tous les exemples précédents sont fuchsien (en ce qui concerne les équations aux  $q$ -différences, la définition sera donnée au chapitre 4). Nous allons examiner des exemple irréguliers. Pour tout le reste de ce chapitre, on suppose que  $|q| > 1$ .

### 1.2.1 Les $q$ -analogues de la série d'Euler

La série d'Euler<sup>4</sup>  $\hat{f}(z) := \sum_{n \geq 0} n! z^{n+1}$  a pour rayon de convergence 0. Elle est solution de l'équation différentielle  $z\delta f - f = -z$  (on rappelle que  $\delta$  désigne l'opérateur différentiel  $z \frac{d}{dz}$ ).

**Premier  $q$ -analogue.** C'est le plus simple (le plus grossier) : il consiste à remplacer  $\delta$  par  $\sigma_q$ , d'où l'équation aux  $q$ -différences :

$$z\sigma_q f - f = -z \iff f = z + z\sigma_q f \iff f = \sum_{n \geq 0} (z\sigma_q)^n z \iff f = \sum_{n \geq 0} q^{n(n+1)/2} z^{n+1}.$$

En effet, l'opérateur  $f \mapsto z + z\sigma_q f$  est  $z$ -adiquement contractant dans  $\mathbf{C}[[z]]$  et admet donc un unique point fixe obtenu par itération ; et  $(z\sigma_q)^n = q^{n(n-1)/2} z^n \sigma_q^n$  en vertu de l'exercice ci-dessous. Dans cet exemple, on a remplacé  $n! = 1 \times \dots \times n$  par  $q^{n(n+1)/2} = q^1 \times \dots \times q^n$  tout simplement parce que  $n$  et  $q^n$  sont les valeurs propres respectives de  $\delta$  et de  $\sigma_q$  associées au vecteur propre  $z^n$ .

**Exercice 1.2.1** Pour  $u \in \mathbf{C}((z))$ , calculer  $(u\sigma_q)^n$ .

**Deuxième  $q$ -analogue.** On remplace  $\delta$  par  $\delta_q$ . cela conduit (en regardant comme ci-dessus les valeurs propres) aux  $q$ -analogues :

$$\begin{aligned} n \leftrightarrow [n]_q &:= \frac{q^n - 1}{q - 1}, \\ n! \leftrightarrow [n]_q! &:= \prod_{0 \leq k < n} \frac{q^k - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

**Exercice 1.2.2** Vérifier que l'équation aux  $q$ -différences :

$$z\delta_q f - f = -z$$

admet pour unique solution la série formelle :

$$\sum_{n \geq 0} [n]_q! z^{n+1}.$$

---

4. Une étude fine des  $q$ -déformations de la série d'Euler est exposée dans [12]. On y découvre notamment que les cas  $|q| > 1$  et  $|q| < 1$  ne sont pas symétriques.

**Troisième  $q$ -analogue.** Les deux séries précédentes ont des propriétés semblables du point de vue de l'analyse<sup>5</sup>. Nous en utiliserons une autre légèrement plus simple, la *série de Tshakaloff* :

$$\mathfrak{Q}(z) := \sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} z^n,$$

qui est l'unique solution de l'équation aux  $q$ -différences :

$$z\sigma_q f - f = -1,$$

comme on peut s'en convaincre par identification des coefficients ou bien en itérant l'opérateur  $f \mapsto 1 + z\sigma_q f$ . Il s'agit d'une équation du premier ordre non homogène, qui donne lieu à une équation homogène d'ordre 2 :

$$qz\sigma_q^2 f - (1+z)\sigma_q f + f = 0.$$

**Exercice 1.2.3** Calculer  $(\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1)$  et en déduire l'équation homogène indiquée.

### 1.2.2 Séries hypergéométriques basiques "confluentes"

De même que les séries hypergéométriques classiques donnent par dégénérescence (spécialisation des paramètres, avec éventuellement "rescaling" de la variable) les séries hypergéométriques dites "confluentes", qui sont solutions d'équations différentielles irrégulières, de même les séries hypergéométriques basiques peuvent dégénérer. Reprenons les notations de 1.1.3 avec ici  $|q| > 1$ , donc en remplaçant  $q$  par  $q^{-1}$ . Lorsque  $c \rightarrow \infty$ , la série  $\Phi(a, b; c; q^{-1}, -qcz)$  dégénère en la série hypergéométrique basique "confluente"

$$\phi(a, b; q, z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a; q^{-1})_n (b; q^{-1})_n}{(q^{-1}; q^{-1})_n} q^{n(n+1)/2} z^n, \text{ où } a, b \in \mathbf{C}^*.$$

De la relation de récurrence entre les coefficients  $u_n$ , on tire une équation aux  $q$ -différences :

$$\begin{aligned} (q^{n+1} - 1)u_{n+1} &= q^2(q^n - a)(q^n - b)u_n, \implies (\sigma_q - 1)\phi = q^2z(\sigma_q - a)(\sigma_q - b)\phi \\ \implies (q^2z(\sigma_q - a)(\sigma_q - b) - (\sigma_q - 1))\phi &= q^2z\sigma_q^2\phi - (1 + (a+b)q^2z)\sigma_q\phi + (1 + abq^2z)\phi = 0. \end{aligned}$$

**Exercice 1.2.4** On définit<sup>6</sup> :

$$s(\alpha, \beta; q, z) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(\alpha - q) \cdots (\alpha - q^n)(\beta - q) \cdots (\beta - q^n)} z^n.$$

Démontrer l'équation aux  $q$ -différences du second ordre non homogène :

$$((\sigma_q - \alpha)(\sigma_q - \beta) - qz\sigma_q^2)s = (1 - \alpha)(1 - \beta).$$

En déduire l'équation aux  $q$ -différences du troisième ordre homogène correspondante.

5. Mais pas de l'arithmétique : voir par exemple [2, 3, 10, 9].

6. Dans son célèbre article de 1935, "The final problem : an account of the Mock Theta Functions" (reproduit, par exemple dans [20]) G. N. Watson (page 330) énumère sept "mock theta functions of order three". Les quatre premières sont notées  $f, \phi, \psi, \chi$  (d'après Ramanujan, qui les a découvertes) ; les trois autres sont notées  $\omega, \nu, \rho$  (d'après Watson, qui les a ajoutées à la liste). Dans [27], Changgui Zhang utilise la série  $s$  pour les étudier.

### 1.3 Classification des équations de rang 1

Une équation aux  $q$ -différences analytique linéaire homogène d'ordre 1 a la forme :

$$\sigma_q f = af,$$

où  $a \in \mathbf{C}(\{z\})^*$ . (On autorise donc les pôles.) Pour résoudre ou classifier de telles équations, on peut être amené à restreindre le corps à  $\mathbf{C}(z)$ , ou au contraire l'étendre à  $\mathbf{C}((z))$ . Commençons donc par une version plus algébrique du problème.

**Remarque 1.3.1** Dans tout ce qui suit, nous excluons le cas où  $q$  est une racine de l'unité (et, à la section suivante, celui où l'automorphisme  $\sigma$  est d'ordre fini) car il se ramène à de la théorie de Galois classique.

#### 1.3.1 Sur un corps quelconque

Soient  $K$  un corps commutatif et  $\sigma$  un automorphisme de  $K$  (d'ordre infini, cf. la remarque ci-dessus). Fixons  $a \in K^*$  et considérons l'équation :

$$\sigma f = af.$$

Si l'on en connaît une solution particulière non triviale  $f_0$ , il est clair que l'ensemble des solutions est :

$$Cf_0 = \{\phi f_0 \mid \phi \in C\}, \text{ où } C = K^\sigma := \{\phi \in K \mid \sigma\phi = \phi\}.$$

Le corps  $C$  joue ici le rôle de *corps des constantes* et nous l'appellerons ainsi.

Il est naturel (pour résoudre ou pour classifier) de faire appel à la transformation de jauge (changement de fonction inconnue) :

$$g = uf, u \in K^*.$$

L'équation de départ est alors équivalente à l'équation :

$$\sigma_q g = bg, \text{ où } b := a \frac{\sigma u}{u}.$$

Les classes d'équivalence d'équations d'ordre 1 pour cette relation forment donc le "groupe de Picard"<sup>7</sup> :

$$\text{Pic}(K, \sigma) := K^*/G_\sigma, \text{ où } G_\sigma := \left\{ \frac{\sigma u}{u} \mid u \in K^* \right\}.$$

En particulier, on a fait apparaître une suite exacte :

$$1 \rightarrow (K^\sigma)^* \rightarrow K^* \xrightarrow{u \mapsto \sigma u/u} K^* \rightarrow \text{Pic}(K, \sigma) \rightarrow 1.$$

Nous allons préciser  $(K^\sigma)^*$  et  $\text{Pic}(K, \sigma)$  dans les cas où  $K := \mathbf{C}((z)), \mathbf{C}(\{z\}), \mathbf{C}(z)$  et  $\sigma := \sigma_q$ . Nous supposons que  $q \in \mathbf{C}^*$  n'est pas une racine de l'unité. Il s'agit donc dans chaque cas d'étudier le noyau et le conoyau de l'endomorphisme  $\lambda : u \mapsto \sigma u/u$  de  $K^*$ .

**Exercice 1.3.2** Traiter le cas où  $q$  est une racine de l'unité.

7. On verra en effet au chapitre 3 qu'il s'agit essentiellement du groupe des classes de modules aux différences de rang 1.

### 1.3.2 Sur le corps $\mathbf{C}((z))$

Le groupe  $\mathbf{C}((z))^*$  admet la décomposition en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}((z))^* = \mathbf{C}^* \cdot z^{\mathbf{Z}} \cdot U, \text{ où } U := 1 + z\mathbf{C}[[z]].$$

L'effet de l'endomorphisme  $\lambda$  sur chaque facteur est le suivant :  $\mathbf{C}^*$  est dans son noyau ;  $z^{\mathbf{Z}}$  est envoyé injectivement sur  $q^{\mathbf{Z}}$  ;  $\lambda$  induit un automorphisme de  $U$ , en vertu du calcul suivant :

$$v = \frac{\sigma_q u}{u} \iff \sigma_q u = vu \iff \forall n \geq 1, q^n u_n = v_0 u_n + \dots + v_n u_0 \iff \forall n \geq 1, u_n = \frac{v_1 u_{n-1} + \dots + v_n u_0}{q^n - 1},$$

où l'on a posé  $u = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$  et  $v = \sum_{n \geq 0} v_n z^n$ ,  $u_0 = v_0 = 1$ . Noter l'intervention de l'hypothèse  $q^n \neq 1$  !

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}((z))^{\sigma_q})^* &= \mathbf{C}^*, \\ G_{\sigma_q} &= q^{\mathbf{Z}} \cdot U, \\ \text{Pic}(\mathbf{C}((z)), \sigma_q) &\simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Comment comprendre les invariants de l'équation  $\sigma_q f = af$  ainsi obtenus ? On écrit  $a = cz^\mu b$ , avec  $c \in \mathbf{C}^*$ ,  $\mu \in \mathbf{Z}$  et  $b \in U$ . Alors  $\mu \in \mathbf{Z}$  est la *pente* de l'équation (on la trouvera dans le polygone de Newton) ; et  $\bar{c} := c \pmod{q^{\mathbf{Z}}} \in \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$  en est l'*exposant*. (Rappelons que les exposants d'une équation différentielle sont des complexes définis modulo  $\mathbf{Z}$ .) La classe d'une équation aux  $q$ -différences d'ordre 1 (formelle) est donc entièrement déterminée par sa pente et son exposant.

**Le groupe  $\mathbf{E}_q$ .** On notera :

$$\mathbf{E}_q := \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

Soit  $\tau \in \mathbf{C}$  tel que  $e^{2i\pi\tau} = q$  (ce n'est donc pas un rationnel) et soit  $\Lambda_\tau := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$  (c'est donc un groupe abélien libre de rang 2). Le morphisme surjectif  $x \mapsto e^{2i\pi x}$  de  $\mathbf{C}$  sur  $\mathbf{C}^*$  induit l'isomorphisme :

$$\mathbf{C}/\Lambda_\tau \simeq \mathbf{E}_q.$$

En particulier, si  $\tau \notin \mathbf{R}$ , c'est-à-dire si  $|q| \neq 1$ , le groupe  $\Lambda_\tau$  est un réseau et le groupe  $\mathbf{E}_q$  est celui d'une courbe elliptique. Le cas où  $\tau \in \mathbf{R}$  et  $|q| = 1$  relève de la géométrie non commutative : voir les exposés de Lucia.

**Formes normales.** Il s'agit de choisir explicitement un représentant de chaque classe. Naturellement, le degré  $\mu$  sera représenté par l'équation  $\sigma_q f = z^\mu f$ . Quant à l'exposant  $\bar{c} \in \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ , l'usage, sous l'hypothèse  $|q| \neq 1$ , est de l'identifier à son unique représentant dans la *couronne fondamentale* :

$$C_q := \begin{cases} \{z \in \mathbf{C}^* \mid 1 \leq |z| < |q|\} & \text{si } |q| > 1, \\ \{z \in \mathbf{C}^* \mid 1 \geq |z| > |q|\} & \text{si } |q| < 1. \end{cases}$$

Il n'y a pas, à ma connaissance, de convention particulière sous l'hypothèse  $|q| = 1$ .

**Exercice 1.3.3** La structure de groupe de  $\mathbf{E}_q$  dépend-elle de  $q$  ? (On suppose que  $q$  n'est pas racine de l'unité.)

### 1.3.3 Sur le corps $\mathbf{C}(\{z\})$

Puisqu'il s'agit de classification analytique, nous supposons que  $|q| \neq 1$ . (Pour le cas  $|q| = 1$ , voir les exposés de Lucia.) Remplacer  $\sigma_q$  par  $\sigma_q^{-1} = \sigma_{q^{-1}}$  ne change ni le corps des constantes ni le groupe de Picard : nous supposons donc que  $|q| > 1$ . L'argumentation de la section précédente est presque inchangée. Le groupe  $\mathbf{C}(\{z\})^*$  admet la décomposition en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}(\{z\})^* = \mathbf{C}^* \cdot z^{\mathbf{Z}} \cdot U, \text{ où } U := 1 + z\mathbf{C}\{z\}.$$

L'effet de l'endomorphisme  $\lambda$  sur chaque facteur est le suivant :  $\mathbf{C}^*$  est dans son noyau ;  $z^{\mathbf{Z}}$  est envoyé injectivement sur  $q^{\mathbf{Z}}$  ;  $\lambda$  induit un automorphisme de  $U$ . Pour ce dernier point, il s'agit seulement de vérifier que, dans le calcul antérieur,  $u$  est analytique (*i.e.* de rayon de convergence non nul) si  $v$  l'est. C'est facile et on en laisse le soin au lecteur. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(\{z\})^{\sigma_q})^* &= \mathbf{C}^*, \\ G_{\sigma_q} &= q^{\mathbf{Z}} \cdot U, \\ \text{Pic}(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q) &\simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Le discours sur les invariants et les formes normales reste inchangé.

**Exercice 1.3.4** Résoudre l'équation  $v = \frac{\sigma_q u}{u}$  par itération de l'équation au point fixe  $u = \sigma_q^{-1}(vu)$ , et en déduire sa solution  $u$  sous forme de produit infini.

### 1.3.4 Sur le corps $\mathbf{C}(z)$

C'est le seul endroit où l'on s'occupera d'un problème "global" ! On a encore la décomposition de  $\mathbf{C}(z)^*$  en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}(z)^* = \mathbf{C}^* \cdot z^{\mathbf{Z}} \cdot U, \text{ où } U := \{f \in \mathbf{C}(z) \mid f(0) = 1\}.$$

Toute fraction rationnelle  $f$  telle que  $f(0) = 1$  est de la forme  $f = \frac{\prod(1 - z/a_i)}{\prod(1 - z/b_j)}$ , où les  $a_i, b_j \in \mathbf{C}^*$ , autrement-dit, elle est entièrement déterminée par le diviseur de ses zéros et pôles sur  $\mathbf{C}^*$ , qui est arbitraire. On a donc un isomorphisme :

$$U \simeq \text{Div}(\mathbf{C}^*),$$

*i.e.* le groupe abélien libre de base  $\mathbf{C}^*$ . Dans la décomposition  $\mathbf{C}(z)^* \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z} \times \text{Div}(\mathbf{C}^*)$ , l'image par  $\lambda$  de  $(a, \mu, D)$  est  $(q^\mu, 1, \sigma_q^* D - D)$ , où :

$$\sigma_q^* (\sum [a_i] - \sum [b_j]) := \sum [a_i/q] - \sum [b_j/q].$$

Le quotient de  $\text{Div}(\mathbf{C}^*)$  par le sous-groupe des  $\sigma_q^* D - D$  est isomorphe à  $\text{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}})$  (voir l'exercice ci-dessous) et l'on a enfin :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(z)^{\sigma_q})^* &= \mathbf{C}^*, \\ G_{\sigma_q} &= q^{\mathbf{Z}} \cdot U, \\ \text{Pic}(\mathbf{C}(z), \sigma_q) &\simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z} \times \text{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}). \end{aligned}$$

**Exercice 1.3.5** Montrer que l'application canonique  $\mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$  induit un morphisme surjectif de  $\text{Div}(\mathbf{C}^*)$  sur  $\text{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}})$  dont le noyau est le sous-groupe des  $\sigma_q^* D - D$  de  $\text{Div}(\mathbf{C}^*)$ .

## Chapitre 2

# Opérateurs et équations

Le but ultime de la théorie est (me semble-t-il) l'étude des fonctions  $q$ -spéciales, ici via leurs équations fonctionnelles. Celles-ci sont *a priori* des équations aux  $q$ -différences linéaires complexes analytiques sur la sphère de Riemann, *i.e.* à coefficients dans  $\mathbf{C}(z)$ ; et que l'on veut classifier *a priori* rationnellement. La stratégie générale est de passer d'abord par la classification analytique locale (dont on recollera le cas échéant les invariants *a posteriori*); et, pour celle-ci, de commencer par la classification formelle, plus grossière, plus algébrique, et sans doute plus facile.

Comme pour les équations différentielles, la partie algébrique comporte deux approches parallèles (bien entendu équivalentes) : l'approche "polynomiale" (équations et opérateurs différentiels, resp. aux  $q$ -différences); et l'approche "linéaire" (systèmes et modules différentiels, resp. aux  $q$ -différences). L'approche polynomiale fait l'objet de ce chapitre, l'approche linéaire du suivant.

Pour cette présentation algébrique, j'ai choisi de me placer dans le cadre général de l'algèbre aux différences chaque fois que cela pouvait se faire avec des hypothèses simples, et de me restreindre aux corps d'intérêt  $\mathbf{C}(z)$ ,  $\mathbf{C}(\{z\})$ ,  $\mathbf{C}((z))$  dans tous les autres cas.

Les lettres  $K$ ,  $\sigma$  désignent respectivement un corps commutatif et un automorphisme de  $K$ . Le couple  $(K, \sigma)$  est appelé *corps aux différences*. Pour ne pas retomber dans la théorie de Galois classique, on supposera toujours  $\sigma$  d'ordre infini.

### 2.1 L'anneau de Ore-Laurent $\mathcal{D}_{K,\sigma}$

L'anneau  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  des opérateurs aux différences est l'anneau des polynômes de Ore-Laurent<sup>1</sup> :

$$\mathcal{D}_{K,\sigma} := K \langle S, S^{-1} \rangle, \text{ avec } : \forall a \in K, S.a = \sigma(a).S.$$

Pratiquement, c'est le  $K$ -espace vectoriel de base les  $S^n, n \in \mathbf{Z}$  dans lequel la multiplication est définie par la formule :

$$\left( \sum a_i S^i \right) \left( \sum b_j S^j \right) := \sum c_k S^k, \text{ où } c_k := \sum_{i+j=k} a^i \sigma^i(b_j).$$

---

1. Polynômes de Ore parce que l'indéterminée  $S$  ne commute pas avec les scalaires  $a \in K$ ; polynômes de Laurent parce que l'indéterminée est inversible. La théorie générale des anneaux de Ore est exposée dans [17].

On vérifie sans peine l'associativité et le fait que  $S^0$  est neutre, etc. Il est clair que  $K$  s'identifie au sous-anneau  $KS^0$  de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ , et que l'anneau  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est engendré par  $K$  et  $S, S^{-1}$ . Il est clair également que les éléments *entiers*, c'est-à-dire de la forme  $\sum_{i \geq 0} a_i S^i$ , forment le sous-anneau engendré par  $K$  et  $S$ .

**Remarque 2.1.1** Non seulement l'anneau  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  n'est pas commutatif, mais son sous-anneau  $K$  n'est pas central (voir exercice) :  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  n'est donc pas une  $K$ -algèbre.

**Exercice 2.1.2** Démontrer que le centre de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est le *corps des constantes* :

$$K^\sigma := \{a \in K \mid \sigma(a) = a\}.$$

L'élément  $\sum a_i S^i$  de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  modélise évidemment l'application  $\sum a_i \sigma^i$  de  $K$  dans lui-même. En fait, l'application  $\sum a_i S^i \mapsto \sum a_i \sigma^i$  est  $K$ -linéaire, injective et transforme le produit dans  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  en la composition. (L'injectivité découle du lemme d'indépendance des caractères d'Artin-Dedekind et de l'hypothèse que  $\sigma$  est d'ordre infini.) On peut donc identifier  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  avec l'anneau des *opérateurs aux différences*  $\sum a_i \sigma^i$  et écrire :

$$\mathcal{D}_{K,\sigma} = K \langle \sigma, \sigma^{-1} \rangle.$$

Il faut alors prendre garde à un risque de confusion lorsque l'on écrit  $\sigma a$ , avec  $a \in K$  : soit c'est une notation allégée pour  $\sigma(a) \in K$  (cet usage est répandu) ; soit cela désigne un produit dans  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ , qui vaut alors  $\sigma(a)\sigma$ .

### 2.1.1 Degré absolu, inversibles, équivalence

Le *degré absolu* (ou simplement degré) est défini ainsi :

$$\deg \sum a_i \sigma^i := \max_{a_i \neq 0} i - \min_{a_i \neq 0} i,$$

autrement dit,  $\deg 0 = -\infty$  (car  $\max \emptyset = -\infty$  et  $\min \emptyset = +\infty$ ) et  $\deg \sum_{i=i_0}^{i_1} a_i \sigma^i = i_1 - i_0 \in \mathbf{N}$  si  $a_{i_0} a_{i_1} \neq 0$ . On a dans tous les cas  $\deg PQ = \deg P + \deg Q$ , d'où l'on déduit immédiatement que  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est intègre. On en déduit également que les inversibles de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  sont les éléments de degré 0, c'est-à-dire les  $a\sigma^k$  ( $a \in K^*, k \in \mathbf{Z}$ ).

Pour tout  $P \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$  non nul, il existe un unique  $Q = uP$ , avec  $u$  inversible, qui soit *standard unitaire*, c'est-à-dire de la forme  $\sum_{i=0}^n a_i S^i$  avec  $a_0 \neq 0$  et  $a_n = 1$ . À noter qu'il existe également un unique  $R = Pv$ , avec  $v$  inversible, qui soit *standard unitaire*, mais que ce n'est en général pas  $Q$  : l'équivalence dans l'anneau non commutatif  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  n'est pas une chose très simple. Nous parlerons donc (si nécessaire) d'*équivalence à gauche*, resp. à *droite*. (Plus généralement, ce qui est compliqué, c'est de comparer les multiples à gauche et les multiples à droite d'un même élément de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ .)

**Exercice 2.1.3** Si  $P = a + b\sigma$  et  $Q = c + d\sigma$  sont de degré 1, dire que  $Q = uP$  pour un  $u$  inversible signifie que  $c/a = d/b$  ; alors que dire que  $Q = Pu$  pour un  $u$  inversible signifie que  $\sigma(c/a) = d/b$ .



## 2.1.2 Division euclidienne, idéaux à gauche

Tout d'abord, soient  $A, B \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$  et supposons  $B$  non nul et  $\deg A \geq \deg B$ . Écrivons les :

$$A = \sum_{i=i_0}^{i_1} a_i \sigma^i \text{ et } B = \sum_{j=j_0}^{j_1} b_j \sigma^j, \text{ avec } a_{i_0} a_{i_1} \neq 0 \text{ et } b_{j_0} b_{j_1} \neq 0.$$

On a donc  $i_1 - i_0 \geq j_1 - j_0 \geq 0$ . Soit  $u := c\sigma^k$ , avec  $c \in K^*, k \in \mathbf{Z}$ . Pour que l'opération  $A - uB$  élimine le terme dominant  $a_{i_1} \sigma^{i_1}$  de  $A$ , il faut, et il suffit, que :

$$(c\sigma^k)(b_{j_1} \sigma^{j_1}) = a_{i_1} \sigma^{i_1} \iff k := i_1 - j_1 \text{ et } c := \frac{a_{i_1}}{\sigma^k(b_{j_1})}.$$

Tous les termes non nuls de  $uB$  ont alors un exposant compris entre  $j_0 + k = j_0 + i_1 - j_1 \geq i_0$  (minorant) et  $j_1 + k = i_1$  (majorant), donc dans le même intervalle que  $A$ . Tous les termes non nuls de  $A - uB$  ont donc un exposant compris entre  $i_0$  (minorant) et  $i_1 - 1$  (majorant), puisque le terme d'exposant  $i_1$  a été éliminé. On a donc :

$$\deg(A - uB) \leq (i_1 - 1) - i_0 < \deg A.$$

**Théorème 2.1.4 (division euclidienne à gauche)** Soient  $A, B \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$  avec  $B \neq 0$ . Il existe alors un couple  $(Q, R) \in \mathcal{D}_{K,\sigma}^2$  tel que  $A = QB + R$  et  $\deg R < \deg B$ .

*Preuve.* - C'est l'algorithme classique :

```
R := A; Q := 0; % invariant de boucle: A = Q B + R
tant que deg R >= deg B
  (choisir u tel que deg(R - u B) < deg R;
  R := R - u B; Q := Q + u);;
```

Il faut bien entendu justifier la possibilité de choisir  $u$  : c'est le calcul qui précède l'énoncé du théorème.  $\square$

**Remarque 2.1.5** Il n'y a pas unicité : l'argument habituel repose sur la règle de majoration de  $R' - R$  qui est fautive ici. Par exemple, en divisant  $a + b\sigma$  par  $\sigma - 1$ , on peut trouver au choix le reste  $a + b$  ou le reste  $(a + b)\sigma$  (qui sont tous deux de degré 0). On peut cependant raffiner l'énoncé, mais nous n'en avons pas besoin.

**Corollaire 2.1.6** Tout idéal à gauche de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est principal. Tout idéal non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme  $\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ , où  $P$  est standard unitaire.

**Alors qu'est-ce qui est compliqué ?** Le corollaire ci-dessus dit que les idéaux à gauche sont simples à classifier : hors l'idéal nul, ils sont en bijection avec leurs générateurs standards unitaires, tout comme les idéaux de polynômes usuels (commutatifs).

Ce qui est compliqué, c'est de classer les modules à gauche monogènes. Hors l'unique cas sans torsion de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ , ils sont tous de la forme  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ , où  $P$  est standard unitaire. Mais il est difficile de dire à quelle condition  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$  est isomorphe à  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ . Plus généralement, il est difficile de décrire les morphismes de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$  dans  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ .

**Exercice 2.1.7** Énoncer et prouver le théorème et le corollaire à droite.

### 2.1.3 Extension du corps de base

Soit  $(K', \sigma')$  une extension du corps aux différences  $(K, \sigma)$ , autrement dit,  $K'$  est une extension de  $K$  et  $\sigma'$  un automorphisme de  $K'$  tel que  $\sigma'|_K = \sigma$ . L'application  $\sum a_i \sigma^i \mapsto \sum a_i \sigma'^i$  de  $\mathcal{D}_{K, \sigma}$  dans  $\mathcal{D}_{K', \sigma'}$  est bien définie puisque  $K \subset K'$ , et il résulte de la condition  $\sigma'|_K = \sigma$  que c'est un morphisme d'anneaux, qui est injectif. On a de plus un isomorphisme de  $K'$ -espaces vectoriels :

$$\mathcal{D}_{K', \sigma'} \simeq K' \otimes_K \mathcal{D}_{K, \sigma}.$$

**Exemple 2.1.8** Si  $K$  est l'un des corps  $\mathbf{C}(z)$ ,  $\mathbf{C}(\{z\})$ ,  $\mathbf{C}((z))$  et si  $\sigma := \sigma_q$ , nous aurons l'usage de l'extension  $K' := K[z^{1/\ell}]$  (qui est galoisienne de groupe  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ ). Notons  $z' := z^{1/\ell}$ . Pour étendre  $\sigma_q$ , nous choisirons une racine  $\ell$ -ième  $q'$  de  $q$ , et nous poserons :

$$\sigma_{q'} : f(z') \mapsto f(q'z').$$

**Exercice 2.1.9** En tant que  $\mathcal{D}_{K, \sigma}$ -module à gauche,  $\mathcal{D}_{K', \sigma'}$  est libre de rang  $[K' : K]$ .

### 2.1.4 Conjugaison (ou transformation de jauge)

On a vu à la section 1.3 l'intérêt des transformations de jauge  $g = uf$ ,  $u \in K^*$ . Ce sont en fait les éléments  $\sigma(u)/u$  qui apparaissent alors effectivement dans les transformations des équations. Nous allons ici envisager une opération analogue  $g = \theta f$ , où l'on ne suppose pas que  $\theta$  est dans le corps de base  $K$ , mais seulement que  $u := \sigma(\theta)/\theta \in K$ .

Soit donc  $u \in K^*$ . On munit le corps  $K' := K(\theta)$  (extension transcendante) de l'unique automorphisme  $\sigma'$  tel que  $\sigma'_K = \sigma$  et que  $\sigma'(\theta) = u\theta$ . Notons pour simplifier  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{K, \sigma}$  et  $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_{K', \sigma'}$ .

Puisque  $\theta$  est inversible dans  $\mathcal{D}'$ , il définit un automorphisme intérieur  $P \mapsto \theta^{-1}P\theta$  de l'anneau  $\mathcal{D}'$ . En vertu du calcul ci-dessous, le sous-anneau  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}'$  est stable par cet automorphisme intérieur :

$$\theta^{-1} \left( \sum a_i \sigma^i \right) \theta = \sum a_i (\theta^{-1} \sigma' \theta)^i = \sum a_i (u\sigma')^i = \sum a_i (u\sigma)^i,$$

car  $\theta^{-1} \sigma \theta = \theta^{-1} \sigma' \theta = \theta^{-1} \sigma'(\theta) \sigma' = u\sigma'$ . En fait, on a des formules explicites :

$$(u\sigma)^i = \begin{cases} u\sigma(u) \cdots \sigma^{i-1}(u) \sigma^i & \text{si } i \geq 0, \\ (\sigma^{-1}(u) \cdots \sigma^{-j}(u))^{-1} \sigma^i & \text{si } -i = j \geq 0. \end{cases}$$

Nous poserons donc, si  $P := \sum a_i \sigma^i$  :

$$P^{[u]} := \sum \tilde{a}_i \sigma^i, \text{ où } \tilde{a}_i := \begin{cases} u\sigma(u) \cdots \sigma^{i-1}(u) a_i & \text{si } i \geq 0, \\ (\sigma^{-1}(u) \cdots \sigma^{-j}(u))^{-1} a_i & \text{si } -i = j \geq 0. \end{cases}$$

On a ainsi défini un automorphisme "extérieur" (!)  $P \mapsto P^{[u]}$  de l'anneau  $\mathcal{D}$ , qui induit l'identité sur  $K$ .

**Exercice 2.1.10** Montrer que  $u \mapsto (P \mapsto P^{[u]})$  est un morphisme de groupes de  $K^*$  dans le groupes des automorphismes de  $\mathcal{D}$ , dont le noyau est  $(K^\sigma)^*$ .

## 2.2 Le polygone de Newton

On va d'abord l'étudier dans le cas d'un corps aux différences valué :  $K$  sera un corps commutatif muni (as usual) d'un automorphisme  $\sigma$ , et aussi d'une valuation discrète  $v$  de groupe inclus dans  $\mathbf{R}$  telle que :

$$(2.2.0.1) \quad \forall x \in K, v(\sigma(x)) = v(x).$$

**Définition 2.2.1** Le polygone de Newton  $N(P)$  de l'opérateur aux différences  $P := \sum a_i \sigma^i \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$  (supposé non nul) est l'enveloppe convexe dans  $\mathbf{R}^2$  de l'ensemble :

$$\{(i, j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \mid j \geq v(a_i)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

La frontière de  $N(P)$  est formée de deux demi-droites verticales (allant vers le haut) et de  $k$  vecteurs numérotés de gauche à droite :  $(r_1, d_1), \dots, (r_k, d_k)$ , avec  $r_i \in \mathbf{N}^*$  et  $d_i \in \mathbf{Z}$ . (La première coordonnée est en fait un rang et la seconde un degré, d'où leurs noms.) Notant  $\mu_i := \frac{d_i}{r_i} \in \mathbf{Q}$  les pentes de ces vecteurs, on a donc (par convexité) :

$$\mu_1 < \dots < \mu_k.$$

On notera  $S(P) := \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$  le "support" de  $N(P)$ .

Si  $Q = a\sigma^\ell P$ , avec  $a \in K^*$  et  $\ell \in \mathbf{Z}$ , il est immédiat que  $N(Q) = N(P) + (\ell, v(a))$ . Le polygone de Newton n'est donc intéressant qu'à translation près, et que c'est l'objet suivant qui possède les meilleures propriétés.

**Définition 2.2.2** Avec les mêmes notations, la *fonction de Newton* de  $P$  est la fonction  $r_P : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{N}$  définie par :

$$r_P(\mu_i) = r_i, \text{ et } r_P = 0 \text{ sur } \mathbf{Q} \setminus S(P).$$

La donnée de  $r_P$  est équivalente à celle de  $N(P)$  à translation près. Ainsi, si  $Q = a\sigma^\ell P$ , avec  $a \in K^*$  et  $\ell \in \mathbf{Z}$ , on a  $r_Q = r_P$ . Autrement dit,  $r_P$  est déterminée par l'idéal  $\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ . On verra qu'elle est même déterminée par le module  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ , mais c'est plus difficile !

### 2.2.1 Valuations tordues, formes initiales, additivité de la fonction de Newton

On fixe  $\mu \in \mathbf{Q}$  et l'on pose :

$$\begin{aligned} v_\mu(a\sigma^\ell) &:= v(a) - \mu\ell, \\ v_\mu(P) &:= \min v_\mu(a_i \sigma^i), \text{ où } P := \sum a_i \sigma^i \\ In_\mu(P) &:= \sum_{v_\mu(a_i \sigma^i) = v_\mu(P)} a_i \sigma^i. \end{aligned}$$

La *forme initiale*  $In_\mu(P)$  (pour la "valuation tordue"  $v_\mu$ ) est caractérisée par les propriétés suivantes :  $In_\mu(P)$  est *homogène* (tous ses termes ont même image par  $v_\mu$ ) ; et  $v_\mu(P - In_\mu(P)) > v_\mu(P)$ . Pour  $P$  et  $Q$  quelconques, on a évidemment :

$$v_\mu(P + Q) \geq \min(v_\mu(P), v_\mu(Q)).$$

**Lemme 2.2.3** Si  $P$  et  $Q$  sont homogènes alors  $PQ$  l'est aussi et  $v_\mu(PQ) = v_\mu(P) + v_\mu(Q)$ . En conséquence,  $In_\mu(PQ) = In_\mu(P)In_\mu(Q)$ .

*Preuve.* - C'est immédiat, grâce à l'hypothèse 2.2.0.1.  $\square$

**Lemme 2.2.4** Le degré absolu de  $In_\mu(P)$  est  $r_P(\mu)$ .

*Preuve.* - C'est un argument classique concernant le polygone de Newton en algèbre commutative : dans la description de la frontière de  $N(P)$  les points du vecteur de pente  $\mu_i$  correspondent aux termes de  $In_{\mu_i}(P)$  ; la non-commutativité de l'indéterminée  $\sigma$  n'y change rien.  $\square$

**Théorème 2.2.5 (Additivité de la fonction de Newton)** Soient  $P, Q \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ . Alors :

$$\forall \mu \in \mathbf{Q}, r_{PQ}(\mu) = r_P(\mu) + r_Q(\mu).$$

*Preuve.* - Cela découle des deux lemmes qui précèdent.  $\square$

## 2.2.2 Comportement de la fonction de Newton par extension

Si l'on remplace  $v$  par  $v' := dv, d \in \mathbf{R}_+^*$ , "les pentes sont multipliées par  $d$ "; pour être précis, le polygone de Newton  $N'(P)$  correspondant à  $v'$  est l'image de  $N(P)$  par l'application  $(x, y) \mapsto (x, dy)$ . Les fonctions de Newton sont reliées par les formules :

$$r'_P(\mu) = r_P(\mu/d) \iff r'_P(d\mu) = r_P(\mu).$$

On utilisera ces relations dans le cas d'une extension  $(K', \sigma')$  du corps aux différences  $(K, \sigma)$ , et munie d'une valuation  $v'$  qui est une extension de  $v$  avec degré de ramification  $d$ , i.e. :  $v'_K = dv$  ; typiquement, c'est l'exemple 2.1.8 avec les valuations  $z$ -adique et  $z'$ -adique.

## 2.2.3 Comportement de la fonction de Newton par conjugaison

On reprend les notations de 2.1.4. Si  $\sigma\theta = u\theta$  et  $v(u) = \lambda$ , les formules reliant  $P^{[u]}$  à  $P$  impliquent :

$$v(\tilde{a}_i) = v(a_i) + i\lambda.$$

On en déduit que le polygone de Newton  $N(P^{[u]})$  est l'image de  $N(P)$  par l'application  $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x)$ . Les fonctions de Newton sont donc reliées par les formules :

$$r_{P^{[u]}}(\mu) = r_P(\mu - \lambda) \iff r_{P^{[u]}}(\mu + \lambda) = r_P(\mu).$$

La conjugaison "augmente les pentes de  $\lambda$ ".

## 2.3 Résolution et factorisation formelles

Nous prenons maintenant  $K := \mathbf{C}((z))$  et  $\sigma := \sigma_q$ . Notre but est de factoriser un opérateur non trivial  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  de manière à “casser le polygone de Newton”, *i.e.* de décomposer  $P$  en produit de facteurs n’ayant chacun qu’une pente. Quitte à multiplier  $P$  à gauche par un facteur inversible, nous pouvons aussi bien supposer que  $v_0(P) = 0$  et que  $P$  est standard (pas nécessairement unitaire); autrement dit :

$$P = \sum_{i \geq 0} a_i \sigma_q^i = \sum_{i, j \geq 0} a_{i, j} z^j \sigma_q^i, \text{ avec } a_0 \neq 0 \text{ et } \exists i : a_{i, 0} \neq 0.$$

### 2.3.1 Équation caractéristique et solutions

Soit  $f := \sum_{k \geq 0} f_k z^k \in \mathbf{C}[[z]]$ . Alors :

$$P.f = \sum_{i, j, k \geq 0} a_{i, j} z^j \sigma_q^i (f_k z^k) = \sum_{i, j, k \geq 0} a_{i, j} q^{ik} f_k z^{j+k} \in \mathbf{C}[[z]].$$

En particulier, les coefficients de  $g := P.f$  sont :

$$g_0 = \left( \sum_{i \geq 0} a_{i, 0} \right) f_0 \text{ et } \forall n \geq 1, g_n = \left( \sum_{i \geq 0} a_{i, 0} q^{ni} \right) f_n + \text{une combinaison linéaire de } f_0, \dots, f_{n-1}.$$

Nous noterons  $CL_n(f_0, \dots, f_{n-1})$  la combinaison linéaire évoquée. (Elle sera précisée en 2.4.1.)

**Lemme 2.3.1** (i) Une condition nécessaire pour que l’équation  $P.f = 0$  admette une solution série formelle  $f \in \mathbf{C}[[z]]$  de terme constant  $f_0 \neq 0$  est :  $\sum_{i \geq 0} a_{i, 0} = 0$ .

(ii) Une condition suffisante pour que l’équation  $P.f = 0$  admette une solution série formelle  $f \in \mathbf{C}[[z]]$  de terme constant  $f_0 \neq 0$  est :

$$\sum_{i \geq 0} a_{i, 0} = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{i \geq 0} a_{i, 0} q^{ni} \neq 0.$$

Cette solution est alors unique pour  $f_0 \in \mathbf{C}^*$  donné.

*Preuve.* - L’assertion (i) découle immédiatement du calcul qui précède. L’assertion (ii) traduit le calcul des coefficients par récurrence :

$$\forall n \geq 1, f_n := -\frac{CL_n(f_0, \dots, f_{n-1})}{\sum_{i \geq 0} a_{i, 0} q^{ni}}.$$

□

**Définition 2.3.2** Soit  $P := \sum a_i \sigma_q^i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  tel que  $v_0(P) \neq 0$ . L’équation caractéristique (associée à la pente 0) de  $P$  est le polynôme de Laurent :

$$\bar{P}(s) := \sum a_{i, 0} s^i \in \mathbf{C}[s, s^{-1}].$$

On dit que  $s_0 \in \mathbf{C}^*$  est une racine non résonnante de l’équation caractéristique si :

$$\bar{P}(s_0) = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, \bar{P}(q^n s_0) \neq 0.$$

La condition nécessaire (resp. suffisante) du lemme se traduit en disant que 1 est racine (resp. racine non résonnante) de l'équation caractéristique de  $P$ . Le lemme peut facilement être amélioré comme suit :

**Lemme 2.3.3** (i) Une condition nécessaire pour que l'équation  $P.f = 0$  admette une solution série formelle  $f \in \mathbf{C}[[z]]$  telle que  $v(f) = m$  est que  $q^m$  soit racine de l'équation caractéristique de  $P$ .  
(ii) Une condition suffisante pour que l'équation  $P.f = 0$  admette une solution série formelle  $f \in \mathbf{C}[[z]]$  telle que  $v(f) = m$  est que  $q^m$  soit racine non résonnante de l'équation caractéristique de  $P$ . Cette solution est alors unique pour  $f_m \in \mathbf{C}^*$  donné.

□

Avec les notations de 2.2.1, il est clair que  $\bar{P}$  n'est autre que la forme initiale de  $P$  associée à la pente 0. Le degré absolu de  $\bar{P}$  est donc égal à  $r_P(0)$  et l'on voit que, pour que l'équation caractéristique admette des racines non nulles, il faut, et il suffit, que  $r_P(0) > 0$ , autrement dit que 0 soit une pente de  $P$ .

**Définition 2.3.4** On suppose que 0 est une pente de  $P$ . Les *exposants* de  $P$  (attachés à la pente 0) sont les racines non nulles de l'équation caractéristique ; les exposants *non résonnants* en sont les racines non résonnantes.

**Solutions attachées aux autres exposants.** Soit  $c \in K^*$  et notons  $e_c$  un élément inversible d'une extension  $(K', \sigma')$  de  $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$  tel que  $\sigma' e_c = c e_c$ . Si  $P := \sum a_i \sigma_q^i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$ , est non trivial, il résulte de 2.1.4 que :

$$e_c^{-1} P e_c = P^{[c]} = \sum a_i c^i \sigma_q^i \implies \overline{P^{[c]}}(s) = \overline{P}(cs).$$

Ainsi, les exposants de  $P^{[c]}$  se déduisent de ceux de  $P$  en divisant ces derniers par  $c$ . En particulier,  $c$  est un exposant (resp. un exposant non résonnant) de  $P$  si, et seulement si,  $1$  est un exposant (resp. un exposant non résonnant) de  $P^{[c]}$ . Dans ce dernier cas, l'équation  $P.f = 0$  admet une unique solution de la forme  $f = e_c g$ , où  $g = 1 + g_1 z + \dots \in \mathbf{C}[[z]]$ . (Argument : si  $f = e_c g$ , alors  $P.f = 0 \Leftrightarrow P^{[c]}.g = 0$  et l'on applique le lemme 2.3.1 à cette dernière équation.)

**Solutions attachées aux pentes entières.** Soit  $\mu \in \mathbf{Z}$  une pente entière de l'opérateur non trivial  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$ . Alors, d'après 2.2.3, 0 est une pente de  $P^{[z^{-\mu}]}$ . Soit maintenant  $c$  un exposant non résonnant de  $P^{[z^{-\mu}]}$  attaché à la pente 0. Notons  $\theta$  un élément inversible d'une extension  $(K', \sigma')$  de  $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$  tel que  $\sigma' \theta = z \theta$ . On suppose également que  $K'$  contient l'élément inversible  $e_c$  tel que  $\sigma' e_c = c e_c$ . Alors l'équation  $P.f = 0$  admet une unique solution de la forme  $f = \theta^\mu e_c g$ , où  $g = 1 + g_1 z + \dots \in \mathbf{C}[[z]]$ .

**Remarque 2.3.5** On peut montrer (lemme du Wronskien, cf. [9]) que les solutions de  $Pf = 0$  dans une extension  $K'$  forment un espace vectoriel de dimension  $\leq \deg P$  sur le corps des constantes de  $K'$ . Si le corps  $K'$  contient suffisamment de symboles  $e_c$ , un symbole  $\theta$  et un symbole  $\ell_q$  tel que  $\sigma' \ell_q = \ell_q + 1$ , alors, pour tout opérateur à pentes entières  $P$ , l'espace des solutions est de dimension  $\deg P$ . En vieux langage, l'équation  $P.f = 0$  admet "a full complement of solutions". Les algorithmes explicites sont décrits dans [15, 26].

### 2.3.2 Factorisation formelle

Nous pouvons maintenant “casser le polygone de Newton”.

**Premier cas.** On suppose que  $P$  admet la pente 0 et l'exposant non résonnant 1. Il résulte alors du lemme 2.3.1 que l'équation  $P.f = 0$  admet une unique solution de la forme  $f = 1 + f_1z + \dots \in \mathbf{C}[[z]]$ . Notons  $g := (\sigma_q f)/f \in \mathbf{C}[[z]]$ , de sorte que  $(\sigma_q - g).f = 0$ . La division euclidienne :

$$P = Q(\sigma_q - g) + R$$

admet un reste  $R$  nul ou de degré 0, et tel que  $R.f = P.f - Q(\sigma_q - g).f = 0$  : on a donc nécessairement  $R = 0$ , d'où  $P = Q(\sigma_q - g)$ .

**Deuxième cas.** On suppose que  $P$  admet la pente 0 et l'exposant  $c \in \mathbf{C}^*$ . Puisque l'ensemble des exposants est fini et que, par hypothèse,  $q$  n'est pas racine de l'unité, quitte à remplacer  $c$  par un  $cq^m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , on peut le supposer non résonnant. D'après ce que l'on a vu en 2.3.1,  $P^{[c]}$  admet l'exposant non résonnant 1 et l'on peut écrire (d'après le premier cas examiné ci-dessus)  $P^{[c]} = Q'(\sigma_q - g')$  pour un  $g' \in \mathbf{C}[[z]]$ , donc  $P = Q(\sigma_q - g)$ , où  $Q := c^{-1}(Q')^{[c^{-1}]}$  et  $g := cg'$ , puisque  $(\sigma_q - g')^{[c^{-1}]} = c^{-1}\sigma_q - g'$ .

**Itération des deux premiers cas.** Il est par ailleurs clair que, dans chacun des deux premiers cas, le polygone de Newton de  $\sigma_q - g$  a pour seule pente 0, et l'on voit que celui de  $Q$  est donné par les relations :

$$r_Q(\mu) = \begin{cases} r_P(\mu) - 1 & \text{si } \mu = 0, \\ r_P(\mu) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons d'ailleurs que, si  $P$  est standard, on peut choisir  $Q$  standard. En itérant cette opération, on voit que l'on peut obtenir une factorisation :

$$P = P'P_0, \text{ où } S(P_0) = \{0\} \text{ et } S(P') = S(P) \setminus \{0\}.$$

Notons que l'égalité  $r_P = r_{P'} + r_{P_0}$  permet alors de déterminer totalement  $r_{P'}$  et  $r_{P_0}$ . Encore une fois, si  $P$  est standard,  $P'$  et  $P_0$  peuvent être choisis standards.

**Troisième cas.** Soit  $\mu$  une pente *entière* quelconque de l'opérateur non trivial  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$ . De la décomposition ci-dessus  $Q = Q'Q_0$  appliquée à  $Q := P^{[z^{-\mu}]}$ , on déduit, en posant  $P' := (Q')^{[z^\mu]}$  et  $P_\mu := Q_0^{[z^\mu]}$ , la décomposition :

$$P = P'P_\mu, \text{ où } S(P_\mu) = \{\mu\} \text{ et } S(P') = S(P) \setminus \{\mu\}.$$

De plus,  $r_{P'}$  et  $r_{P_\mu}$  sont alors totalement déterminés par cette relation (et l'additivité de la fonction de Newton) ; et, si  $P$  est standard,  $P'$  et  $P_0$  peuvent être choisis standards.

En itérant le troisième cas, on obtient immédiatement :

**Théorème 2.3.6** Soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  un opérateur non trivial à pentes entières. Notons  $\mu_1, \dots, \mu_k$  les pentes de  $P$  dans un ordre arbitraire. Il existe alors une décomposition :

$$P = P_1 \cdots P_k$$

dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  telle que, pour  $i = 1, \dots, k$  :

$$r_{P_i}(\mu_i) = r_P(\mu_i) \text{ et } \forall \mu \in \mathbf{Q} \setminus \{\mu_i\}, r_{P_i}(\mu) = 0.$$

Si  $P$  est standard, les  $P_i$  peuvent être choisis standards.

□

**Quatrième cas.** Si les pentes de  $P$  en sont pas toutes entières, soit  $\ell$  un dénominateur commun et considérons l'extension  $K'$  décrite à l'exemple 2.1.8. Le polygone de Newton de  $P$  vu comme élément de  $\mathcal{D}' := K' \otimes_{\mathbf{C}(\{z\})} \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  est à pentes entières, et l'on déduit du théorème une décomposition  $P = P_1 \cdots P_k$  qui casse le polygone de Newton, à ceci près que les  $P_i$  sont dans  $\mathcal{D}'$ . Nous verrons via l'algèbre linéaire au 3.3.2 qu'une telle décomposition existe dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$ .

## 2.4 Résolution et factorisation analytiques

Nous avons vu que les opérateurs aux  $q$ -différences à coefficients formels admettent une factorisation qui casse leur polygone de Newton, propriété partagée par les opérateurs différentiels et aux différences. Nous allons voir que les opérateurs aux  $q$ -différences à coefficients analytiques admettent une factorisation *analytique* qui casse leur polygone de Newton, phénomène découvert par Adams et redécouvert indépendamment par Birkhoff-Guenter, et que nous nommerons *lemme d'Adams* : ce résultat est spécifique aux  $q$ -différences.

### 2.4.1 Le lemme d'Adams

Soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  un opérateur aux  $q$ -différences à coefficients analytiques non trivial. Pour être précis, le lemme d'Adams dit que les séries formelles  $g = 1 + g_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$  qui apparaissent dans les solutions de l'équation  $f = \theta^\mu e_c g$  décrites en 2.3.1 sont, si  $\mu$  est la dernière pente de  $P$ , convergentes. Nous prendrons  $P$  sous forme standard :  $P = a_0 + \cdots + a_n \sigma_q^n$ ,  $a_0 a_n \neq 0$ ; et de plus tel que  $v_0(P) = 0$ , i.e. les  $a_i \in \mathbf{C}\{z\}$  et l'un au moins des  $a_i(0)$  est non nul.

**Lemme 2.4.1 (Adams)** On suppose que la dernière pente de  $P$  (i.e. sa plus grande pente) est 0, et que 1 en est exposant non résonnant. Alors l'unique solution de  $P.f = 0$  de la forme  $f = 1 + f_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$  est convergente.

*Preuve.* - On écrit :

$$P = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} a_{i,j} z^j \sigma_q^i,$$

et, pour  $j \in \mathbf{N}$  :

$$P_j := \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i,j} \sigma_q^i \in \mathbf{C} \langle \sigma_q \rangle, \quad \bar{P}_j := \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i,j} s^i \in \mathbf{C}[s].$$



On a donc  $P = P_0 + zP_1 + \dots$  et  $\bar{P} = \bar{P}_0$ . De l'égalité facile  $(z^j P_j)(f_k z^k) = \bar{P}_j(q^k) f_k z^{j+k}$ , on tire le coefficient  $(P.f)_\ell$  de  $z^\ell$  dans  $P.f$  :

$$(P.f)_\ell = \sum_{j+k=\ell} \bar{P}_j(q^k) f_k = \bar{P}_\ell(q^0) f_0 + \dots + \bar{P}_0(q^\ell) f_\ell.$$

Avec ces notations, les coefficients de la solution  $f$  sont donnés par  $f_0 := 1$  et la relation de récurrence :

$$\forall \ell \geq 1, f_\ell := -\frac{\bar{P}_\ell(q^0) f_0 + \dots + \bar{P}_0(q^{\ell-1}) f_{\ell-1}}{\bar{P}_0(q^\ell)}.$$

Bien entendu, tous les  $\bar{P}_j$  sont de degré  $\leq n$ . L'hypothèse sur la pente 0 et l'exposant non résonnant 1 dit que  $\bar{P}_0$  est de degré  $n$ , que  $\bar{P}_0(1) = 0$ , et que  $\bar{P}_0(q^\ell) \neq 0$  pour tout  $\ell \geq 1$  (ce qui assure la non nullité du dénominateur dans la relation de récurrence ci-dessus). Il existe donc  $A > 0$  tel que :

$$\forall \ell \geq 1, |\bar{P}_0(q^\ell)| \geq A |q|^{\ell n}.$$

Soit enfin  $R > 0$  strictement majoré par les rayons de convergence de  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}\{z\}$  et soit  $C := R^{-1}$ . Il existe donc  $B > 0$  tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \geq 0, |a_{i,j}| \leq BC^j.$$

On en déduit les majorations :

$$|\bar{P}_j(s)| \leq \sum_{i=0}^n BC^j |s|^i \leq BC^j \frac{|s|^{n+1} - 1}{|s| - 1},$$

d'où en particulier (puisque  $|q| > 1$ ) l'existence de  $D > 0$  tel que :

$$\forall i, j |\bar{P}_j(q^i)| \leq DC^j |q|^{ni}.$$

De la relation de récurrence, on tire alors, pour  $\ell \geq 1$  :

$$|f_\ell| \leq \frac{D}{A} \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{C^{\ell-i} |q|^{ni}}{|q|^{n\ell}} |f_i| \implies \frac{|f_\ell|}{(C|q|^{-n})^\ell} \leq E \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{|f_i|}{(C|q|^{-n})^i}$$

pour un certain  $E > 0$ . Il est alors facile de conclure à la convergence de  $f$ .  $\square$

**Remarque 2.4.2** Le raisonnement ci-dessus ne vaut que parce que 0 est la plus grande pente de  $P$ . Par exemple, si l'on prend :

$$P := (\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1) = qz\sigma_q^2 - (1+z)\sigma_q + 1,$$

dont les pentes sont 0 et 1, et dont 0 est exposant non résonnant, la solution  $f$  est la série de Tshakaloff de 1.2.1 :

$$\mathfrak{U}(z) := \sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} z^n,$$

qui diverge rapidement.

## 2.4.2 Factorisation analytique

Reprenant les arguments de 2.3.2 qui ont mené au théorème 2.3.6, nous obtenons la factorisation analytique. Il est à noter que *l'ordre des pentes est imposé* par le lemme d'Adams : on factorise d'abord à droite la plus grande pente.

**Théorème 2.4.3 (Adams, Birkhoff-Guenter)** *Soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  un opérateur non trivial à pentes entières. Notons  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  les pentes de  $P$  rangées en ordre croissant. Il existe alors une décomposition :*

$$P = P_1 \cdots P_k$$

dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$  telle que, pour  $i = 1, \dots, k$  :

$$r_{P_i}(\mu_i) = r_P(\mu_i) \text{ et } \forall \mu \in \mathbf{Q} \setminus \{\mu_i\}, r_{P_i}(\mu) = 0.$$

Si  $P$  est standard, les  $P_i$  peuvent être choisis standards.

□

Quitte à ramifier, cette décomposition subsiste pour un opérateur à pentes quelconques, à condition de prendre les facteurs  $P_i$  dans  $\mathcal{D}' := K' \otimes_{\mathbf{C}(\{z\})} \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$ . Comme pour le cas formel, nous verrons au 3.3.2 que le résultat demeure vrai avec des  $P_i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q}$ .

**Exercice 2.4.4** Montrer que l'opérateur  $P := (\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1) = qz\sigma_q^2 - (1+z)\sigma_q + 1$  n'admet aucune factorisation convergente  $P = P_1 P_0$  pour laquelle  $S(P_0) = 0$  et  $S(P_1) = 1$ .

# Chapitre 3

## Systemes et modules

Parallèlement aux méthodes “polynomiales” du chapitre précédent, il y a les méthodes “linéaires” que nous allons maintenant utiliser.

### 3.1 Modules aux différences

On se place de nouveau (au moins pour commencer) dans le cas d’un corps commutatif  $K$  muni d’un automorphisme  $\sigma$  d’ordre infini.

#### 3.1.1 Équations, systèmes, modules, morphismes

**Équations et systèmes.** Soit  $P := a_0 + \dots + a_n \sigma^n \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$  un opérateur non trivial standard, i.e.  $a_0 a_n \neq 0$ . Comme pour les équations différentielles, on peut *vectorialiser* une équation aux différences scalaire d’ordre  $n$  en un système aux différences de rang  $n$  :

$$P.f = 0 \iff \sigma X = AX, \text{ où } X := \begin{pmatrix} f \\ \sigma f \\ \vdots \\ \sigma^{n-2} f \\ \sigma^{n-1} f \end{pmatrix} \text{ et } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \dots & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix}.$$

On remarque d’ailleurs que la matrice d’un tel système est inversible :

$$\det A = (-1)^n a_0/a_n \implies A \in \text{GL}_n(K).$$

Une extension du corps ne modifie évidemment pas le système. Une transformation de jauge  $g = \theta f$ , avec  $\sigma \theta = u \theta$ , remplace  $P$  par  $P^{[u]}$ , qui donne lieu au système  $\sigma Y = BY$ , où :

$$Y := \begin{pmatrix} g \\ \sigma g \\ \vdots \\ \sigma^{n-1} g \end{pmatrix} = TX, \quad T := \begin{pmatrix} \theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^{n-1} \theta \end{pmatrix}, \quad B = (\sigma T)AT^{-1}.$$

Plus généralement, pour toute *matrice de transformation de jauge*  $F \in \text{GL}_n(K)$ , le changement d’inconnue  $Y = FX$  donne lieu au système équivalent  $\sigma Y = BY$ , où :

$$B = F[A] := (\sigma F)AF^{-1}.$$

Notre but est de classifier les systèmes aux différences pour la relation d'équivalence :

$$A \sim B \iff \exists F \in \text{GL}_n(K) : B = F[A].$$

Nous verrons d'ailleurs au 3.2.2 que tout système est équivalent au système provenant d'une équation.

**Exercice 3.1.1** Dans l'exemple ci-dessus (système provenant d'une équation), montrer que  $B \sim uA$ . (On suppose que  $u \in K^*$  mais pas que  $\theta \in K^*$ .)

**Systèmes et modules.** Comme bien souvent, pour classifier, on a intérêt à définir une catégorie des objets à classifier. Considérons l'application  $\Phi_A : K^n \rightarrow K^n, X \mapsto A^{-1}(\sigma X)$ . C'est un *automorphisme semi-linéaire* ou encore  $\sigma$ -*linéaire*<sup>1</sup> de  $K^n$ , autrement dit :

$$\forall a \in K, \forall X \in K^n, \Phi_A(aX) = \sigma(a)\Phi_A(X).$$

**Définition 3.1.2** Un *module aux différences* sur le corps aux différences  $(K, \sigma)$  est un couple  $(V, \Phi)$  formé d'un  $K$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie et d'un automorphisme semi-linéaire (ou encore  $\sigma$ -linéaire) de  $V$ . Un morphisme de modules aux différences de  $(V, \Phi)$  dans  $(W, \Psi)$  est une application  $K$ -linéaire  $f : V \rightarrow W$  telle que  $\Psi \circ f = f \circ \Phi$ . La catégorie ainsi définie sera notée  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$ .

Soient  $(V, \Phi)$  un module aux différences et  $\mathcal{B}$  une base de  $V$ . On voit sans peine que  $\Phi(\mathcal{B})$  est une base de  $V$  et que l'on peut donc écrire :

$$\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}A', \text{ avec } A' \in \text{GL}_n(K).$$

Notant  $A := A'^{-1}$ , on voit alors que l'application  $f : X \mapsto \mathcal{B}X$  est un isomorphisme de modules aux différences de  $(K^n, \Phi_A)$  dans  $(V, \Phi)$ ; cela résulte du calcul suivant :

$$(\Phi \circ f)(X) = \Phi(\mathcal{B}X) = \Phi(\mathcal{B})\sigma(X) = \mathcal{B}A^{-1}\sigma(X) = f(A^{-1}\sigma(X)) = (f \circ \Phi_A)(X).$$

(La deuxième égalité vient de la  $\sigma$ -linéarité de  $\Phi$ .) Ainsi, tout module aux différences est isomorphe à un  $(K^n, \Phi_A)$ . D'autre part, les morphismes de  $(K^n, \Phi_A)$  dans  $(K^p, \Phi_B)$  sont par définition des applications linéaires de  $K^n$  dans  $K^p$ , donc des matrices  $F \in M_{p,n}(K)$ , telles que, pour tout  $X \in K^n$ , on ait  $B^{-1}\sigma(FX) = FA^{-1}\sigma(X)$ , autrement dit, telles que :

$$(\sigma F)A = BF.$$

En particulier, tout isomorphisme de  $(K^n, \Phi_A)$  dans  $(K^p, \Phi_B)$  est une matrice  $F \in \text{GL}_n(K)$  telle que  $F[A] = B$ . Plus généralement,  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$  est équivalente à la catégorie dont les objets sont les matrices inversibles sur  $K$  et telle que les morphismes de  $A \in \text{GL}_n(K)$  dans  $B \in \text{GL}_p(K)$  sont les matrices  $F \in M_{p,n}(K)$  telles que  $(\sigma F)A = BF$ .

1. L'exposant  $-1$  de  $A$  a l'effet suivant : les solutions du système  $\sigma X = AX$  sont les points fixes de  $\Phi_A$ . Comparer avec le cas d'un module différentiel  $(K^n, \Delta_A)$ , où  $\Delta_A(X) = X' - AX$  : les solutions du système  $X' = AX$  sont les vecteurs "horizontaux" de  $\Delta_A$ .

### 3.1.2 Abélianité

**Proposition 3.1.3** *La catégorie  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$  est abélienne et  $K^\sigma$ -linéaire.*

*Preuve.* - Soit  $f : (V, \Phi) \rightarrow (W, \Psi)$  un morphisme dans la catégorie  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$ . Le noyau  $f$  est  $\Phi$ -stable et son image est  $\Psi$ -stable. Les morphismes de groupes  $\Phi, \Psi$  induisent donc respectivement des endomorphismes du noyau et du conoyau de  $f$ , dont on voit aisément que ce sont des automorphismes  $\sigma$ -linéaires. On obtient ainsi un noyau et un conoyau dans  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$ , dont l'abélianité peut se vérifier mécaniquement (sinon, voir la proposition 3.2.1).

Il est d'autre part clair que  $\text{Hom}((V, \Phi), (W, \Psi)) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, W) \mid \Psi \circ f = f \circ \Phi\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{L}_K(V, W)$  et qu'il est stable par multiplication externe par les éléments de  $K^\sigma$ , d'où la  $K^\sigma$ -linéarité.  $\square$

**Suites exactes.** Il sera utile d'avoir une forme "concrète" pour les suites exactes dans  $\text{DiffMod}(K, \sigma)$ . Soit une telle suite :

$$0 \rightarrow (V', \Phi') \rightarrow (V, \Phi) \rightarrow (V'', \Phi'') \rightarrow 0.$$

En choisissant une base  $\mathcal{B}'$  de  $V'$ , que l'on étend (modulo l'identification de  $V'$  avec un sous-espace de  $V$ ) en une base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , et en prenant pour base  $\mathcal{B}''$  de  $V''$  l'image de  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ , on voit que la suite ci-dessus est isomorphe à la suivante :

$$0 \rightarrow (K^{n'}, \Phi_{A'}) \rightarrow (K^n, \Phi_A) \rightarrow (K^{n''}, \Phi_{A''}) \rightarrow 0,$$

dans laquelle  $n = n' + n''$ , l'injection est l'inclusion canonique de  $K^{n'}$  dans  $K^{n'+n''} = K^{n'} \times K^{n''}$  et la surjection est la projection canonique de  $K^{n'+n''} = K^{n'} \times K^{n''}$  sur  $K^{n''}$ . En particulier,  $A$  est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix}.$$

**Constructions tensorielles.** Ce paragraphe est facultatif (il sert plutôt à la théorie de Galois). On vérifie que si  $(V, \Phi)$  et  $(W, \Psi)$  sont des modules aux différences, alors :

1. Le  $K$ -espace vectoriel  $V \otimes_K W$  peut être muni d'un unique automorphisme  $\sigma$ -linéaire tel que  $x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)$ . On notera  $(V, \Phi) \otimes (W, \Psi)$  le module aux différences obtenu ("produit tensoriel").
2. Le  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}_K(V, W)$  peut être muni de l'automorphisme  $\sigma$ -linéaire  $f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ . On notera  $\underline{\text{Hom}}((V, \Phi), (W, \Psi))$  le module aux différences obtenu ("Hom interne").
3. Le  $K$ -espace vectoriel dual  $V^\vee$  peut être muni de l'automorphisme  $\sigma$ -linéaire  $\Phi^\vee := {}^t \Phi^{-1} : f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$ . On notera  $(V, \Phi^\vee)$  le module aux différences obtenu ("dual").

De plus, on note  $\underline{1}$  ("unité") le module aux différences  $(K, \sigma)$ . On a alors des isomorphismes fonctoriels :

$$\begin{aligned} \underline{1} \otimes (V, \Phi) &\simeq (V, \Phi), \\ \underline{\text{Hom}}((V, \Phi), \underline{1}) &\simeq (V, \Phi)^\vee, \\ \underline{\text{Hom}}((V, \Phi) \otimes (V', \Phi'), (W, \Psi)) &\simeq \underline{\text{Hom}}((V, \Phi), \underline{\text{Hom}}((V', \Phi'), (W, \Psi))). \end{aligned}$$

**Exercice 3.1.4** Vérifier ces formules et montrer que les classes d'isomorphismes de modules aux différences de rang 1 forment un groupe pour le produit tensoriel ; reconnaître  $\text{Pic}(K, \sigma)$ .

## 3.2 Relation avec les $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -modules

### 3.2.1 $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -modules à gauche de longueur finie

Soit  $(V, \Phi)$  un module aux différences sur  $(K, \sigma)$ . On munit le groupe  $V$  d'une structure d'un  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module à gauche en définissant la multiplication externe par la formule :

$$\left(\sum a_i \sigma^i\right) .x := \sum a_i \Phi^i(x).$$

Le fait que l'on obtienne bien un  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module est directement lié à la  $\sigma$ -linéarité de  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \left(\left(\sum a_i \sigma^i\right) \left(\sum b_j \sigma^j\right)\right) .x &= \left(\sum a_i \sigma^i (b_j \sigma^{i+j})\right) .x = \sum a_i \sigma^i (b_j \Phi^{i+j}(x)) = \\ &= \left(\sum a_i \Phi^i\right) \left(\sum b_j \Phi^j(x)\right) = \left(\sum a_i \sigma^i\right) .\left(\sum b_j \sigma^j\right) .x. \end{aligned}$$

(La  $\sigma$ -linéarité justifie la troisième égalité.) Si de plus  $f$  est un morphisme de  $(V, \Phi)$  dans  $(W, \Psi)$ , il découle facilement de la relation  $\Psi \circ f = f \circ \Phi$  que  $f$  est une application  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -linéaire du  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $V$  dans le  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $W$  :

$$f\left(\left(\sum a_i \sigma^i\right) .x\right) = f\left(\sum a_i \Phi^i(x)\right) = \sum a_i (f \circ \Phi^i)(x) = \sum a_i (\Psi^i \circ f)(x) = \left(\sum a_i \sigma^i\right) .f(x).$$

Réciproquement, pour toute telle application  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -linéaire, la relation  $f(\sigma.x) = \sigma.f(x)$  se traduit par  $\Psi \circ f = f \circ \Phi$ .

**Proposition 3.2.1** *Le foncteur qui au module aux différences  $(V, \Phi)$  associe le  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $V$  est pleinement fidèle. Son image (essentielle) est formée des  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -modules qui sont, en tant que  $K$ -espaces vectoriels, de dimension finie.*

*Preuve.* - La pleine fidélité résume les calculs ci-dessus. Pour que le  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $V$  provienne d'un module aux différences, il est évidemment nécessaire que  $\dim_K V < \infty$ . Réciproquement, si  $\dim_K V < \infty$ , en posant  $\Phi(x) := \sigma.x$ , on obtient bien alors un module aux différences  $(V, \Phi)$ . (Puisque le centre de  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est  $K^\sigma$ , on retrouve ainsi la proposition 3.1.3.)  $\square$

**Exemple 3.2.2 (Modules cycliques)** Le module aux différences  $(V, \Phi)$  est *cyclique*, autrement dit, il existe  $x \in V$  tel que les  $\Phi^i(x), i \in \mathbf{Z}$  engendrent le  $K$ -espace vectoriel  $V$ , si, et seulement si, le  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $V$  est monogène, autrement dit (puisque  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est principal à gauche) de la forme  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  ou bien  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$  avec  $P$  standard unitaire. Le premier cas ne peut se produire puisque  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  est de dimension infinie sur  $K$ . En revanche, pour tout  $P$  standard unitaire, le  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$  est bien de dimension finie  $\deg P$ .

Les suites exactes de tels modules sont nécessairement (à isomorphisme près) de la forme :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q \rightarrow \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}QR \rightarrow \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R \rightarrow 0,$$

l'injection étant induite par l'application  $X \mapsto XR$ . En effet, pour tout morphisme surjectif  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P \rightarrow V$ , le  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ -module  $V$  est monogène et de dimension finie sur  $K$ , et la surjection s'identifie à  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P \rightarrow \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R$  avec  $\mathcal{D}_{K,\sigma}P \subset \mathcal{D}_{K,\sigma}R$ , i.e.  $P = QR$  pour un certain  $Q$ ; et l'on peut supposer  $P, Q, R$  standards unitaires. Le noyau de cette surjection est  $\mathcal{D}_{K,\sigma}R/\mathcal{D}_{K,\sigma}QR$  qui est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ , l'isomorphisme étant induit par  $X \mapsto XR$ .

### 3.2.2 Le lemme du vecteur cyclique

On se place maintenant dans le cas des modules aux  $q$ -différences :  $K$  est  $\mathbf{C}((z))$ ,  $\mathbf{C}(\{z\})$  ou  $\mathbf{C}(z)$ , et  $\sigma$  est  $\sigma_q$ .

**Théorème 3.2.3 (Lemme du vecteur cyclique)** *Tout module aux  $q$ -différences est cyclique.*

*Preuve.* - Nous reproduisons la démonstration donnée dans [9]. Soit  $(V, \Phi)$  un module aux  $q$ -différences de rang  $n$ . Soient  $x \in V$  et  $m \in \mathbf{N}$  tels que :

$$x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) \neq 0,$$

avec  $m$  maximal ; c'est possible puisqu'un tel  $m$  est *a priori* majoré par  $n$ . On va supposer que  $m < n$  et en déduire une contradiction : il s'ensuivra que  $m = n$ , donc que les vecteurs  $x, \Phi(x), \dots, \Phi^{n-1}(x)$  sont linéairement indépendants, donc qu'ils engendrent  $V$ , *i.e.* que  $x$  est un *vecteur cyclique*.

Pour tous  $\lambda \in \mathbf{C}$ ,  $s \in \mathbf{Z}$  et  $x' \in V$ , notant  $y := x + \lambda z^s x'$ , on a :

$$y \wedge \Phi(y) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(y) = 0.$$

Le membre gauche de cette égalité est un polynôme en  $\lambda$ , dont le terme de degré 1 a pour coefficient :

$$\sum_{i=0}^m q^{si} x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{i-1}(x) \wedge \Phi^i(x') \wedge \Phi^{i+1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(x),$$

qui est donc nul. Comme c'est vrai pour tout  $s$  et que  $q$  n'est pas racine de l'unité, ce polynôme en  $q^s$  admet une infinité de racines distinctes, donc ses coefficients sont nuls :

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{i-1}(x) \wedge \Phi^i(x') \wedge \Phi^{i+1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(x) = 0.$$

De l'égalité  $x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) \wedge \Phi^m(x') = 0$  valable pour tout  $x' \in V$ , on déduit alors que  $x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) = 0$ , qui est la contradiction cherchée.  $\square$

Ce théorème fondamental signifie d'abord que *tout système aux  $q$ -différences est équivalent au système provenant d'une équation*. Noter que cela n'est pas tautologique (il faut faire intervenir le dual du module associé, voir [24]). Il nous indique ensuite le chemin (détourné) dans l'étude théorique d'une équation  $L.f = 0$  : la vectorialiser en un système  $\sigma_q X = AX$  ; puis représenter le module  $(\mathbf{C}((z))^n, \Phi_A)$  sous la forme  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P$ .

**Exemple 3.2.4** Soit  $L := \sigma_q - u \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$ . La matrice associée est  $(u)$ , et le module aux  $q$ -différences est  $(\mathbf{C}((z)), \Phi_u)$ , où  $\Phi_u(x) = u^{-1} \sigma_q x$ , qui admet  $e := 1$  comme vecteur cyclique. Comme  $\Phi_u(e) = u^{-1} e$ , le morphisme surjectif  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} \rightarrow \mathbf{C}((z))$  défini par  $1 \mapsto e$  a pour noyau  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} L^\vee$ , où  $L^\vee := \sigma_q - u^{-1}$ .

**Exercice 3.2.5** Faire le même chemin à partir de  $L \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  quelconque. (La réponse est donnée dans [24].)

**Exercice 3.2.6** Dans le cas des modules aux  $q$ -différences, la condition de finitude de  $\dim_K V$  équivaut au fait que le  $\mathcal{D}_{K, \sigma}$ -module  $V$  est de longueur finie.

### 3.3 Le polygone de Newton d'un module aux $q$ -différences

On se place dans le cas des modules aux  $q$ -différences, *i.e.*  $K$  est  $\mathbf{C}((z))$ ,  $\mathbf{C}(\{z\})$  ou  $\mathbf{C}(z)$ , et  $\sigma$  est  $\sigma_q$ . Nous allons construire les outils de base pour la classification. Les résultats sont démontrés pour  $K = \mathbf{C}((z))$ , ils s'appliquent *a fortiori* aux deux autres corps.

#### 3.3.1 Le polygone de Newton est un invariant formel

**Théorème 3.3.1** *Le module aux  $q$ -différences  $M$  étant donné, tous les opérateurs  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  tels que  $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P$  ont la même fonction de Newton.*

*Preuve.* - (i) Supposons d'abord  $M$  de rang 1. À inversible près (ce qui ne change pas la fonction de Newton), on peut supposer que  $P = \sigma_q - f$ . Mais nous savons déjà que, si  $Q = \sigma_q - g$ , l'isomorphisme de  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} Q \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P$  entraîne  $g = f\sigma_q u / u$  avec  $u$  inversible, donc  $r_P = r_Q$ .

(ii) Supposons ensuite  $M$  à pentes entières et soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  tel que  $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P$ . On peut factoriser  $P = P_1 \cdots P_n$  en produits de facteurs de degré 1 (2.3.2) et l'on a  $r_P = \sum r_{P_i}$  (théorème 2.2.5). Par ailleurs, des suites exactes décrites dans l'exemple 3.2.2, on déduit que  $M$  admet une tour de sous-modules :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

telle que  $S_i := M_i / M_{i-1} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P_i$ . Mais les modules  $S_i$  sont de rang 1, donc simples, donc, d'après le théorème de Jordan-Hölder, déterminés à l'ordre près. Il en est donc de même des  $r_{S_i} := r_{P_i}$  d'après le premier cas ci-dessus.

(iii) Prenons enfin  $M$  arbitraire. Quitte à ramifier, *i.e.* à remplacer  $\mathbf{C}((z))$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  par des extensions convenables  $K' := \mathbf{C}((z))[z^{1/\ell}]$  et  $\mathcal{D}' := K' \otimes \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$ , on se ramène au cas précédent.  $\square$

**Définition 3.3.2** *La fonction de Newton  $r_M$  du module aux  $q$ -différences  $M$  est la fonction de Newton  $r_P$  de n'importe quel  $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q}$  tel que  $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} / \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)), \sigma_q} P$ . Par abus de langage, nous appellerons *polygone de Newton*  $N(M)$  de  $M$  est tout polygone de Newton associé à  $r_M$  (ils ne sont définis qu'à translation près). Enfin, nous appellerons fonction, resp. polygone de Newton de  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$  la fonction  $r_M$ , resp. "le" polygone  $N(M)$  associés à  $M := (\mathbf{C}((z))^n, \Phi_A)$ .*

Par sa construction même (à base de suites exactes), la fonction de Newton admet de nombreuses propriétés "abéliennes" dont la plus importante est la suivante :

**Théorème 3.3.3 (Additivité de la fonction de Newton)** *Soit  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$  une suite exacte de modules aux  $q$ -différences. Alors :*

$$r_M = r_{M'} + r_{M''}.$$

*Preuve.* - Cela découle, au choix, des propriétés des tours de Jordan-Hölder relativement aux suites exactes ; ou bien du théorème 2.2.5 joint à la description des suites exactes dans l'exemple 3.2.2.  $\square$

**Remarque 3.3.4** Les deux théorèmes d'additivité 2.2.5 et 3.3.3 sont nettement différents des théorèmes correspondants pour les équations différentielles, voir [4].



### 3.3.2 Propriétés abéliennes et conséquences

Il y a d'abord une série de conséquences immédiates du théorème 3.3.3. Nous noterons  $S(M)$  l'ensemble des pentes du module aux  $q$ -différences  $M$ , c'est-à-dire le support de sa fonction de Newton  $r_M$ .

**Définition 3.3.5** ) Nous dirons que  $M$  est *pur isocline de pente  $\mu$*  si sa seule pente est  $\mu$ , i.e. si  $S(M) = \{\mu\}$ .

**Corollaire 3.3.6** (i) Si  $M$  est pur isocline de pente  $\mu$ , il en est de même de ses sous-modules et de ses quotients.

(ii) Une extension (en particulier une somme directe) de modules purs isoclines de pente  $\mu$  est un module pur isocline de pente  $\mu$ .

(iii) La somme de deux sous-modules purs isoclines de pente  $\mu$  d'un même module est un module pur isocline de pente  $\mu$ .

(iv) Tout module  $M$  admet un plus grand sous-module pur isocline de pente  $\mu$ .

(v) Soit  $f : M' \rightarrow M''$  un morphisme. Alors l'image par  $f$  d'un sous-module pur isocline de pente  $\mu$  de  $M'$  est un sous-module pur isocline de pente  $\mu$  de  $M''$ .

**Corollaire 3.3.7** (i) Si  $M', M''$  sont des sous-modules de  $M$  tels que  $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$ , alors  $M' \cap M'' = \{0\}$ .

(ii) Plus généralement, si les  $M_i$  sont des sous-modules de  $M$  tels que les  $S(M_i)$  sont deux à deux disjoints, alors les  $M_i$  sont en somme directe.

(iii) Soit  $f : M' \rightarrow M''$  un morphisme. Si  $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$ , alors  $f = 0$ .

### 3.3.3 Existence de sous-modules purs

Nous avons vu que tout module  $M$  admet un plus grand sous-module pur isocline de pente  $\mu$ . De l'additivité de la fonction de Newton, il découle que celui-ci est de rang  $\leq r_M(\mu)$ . Le théorème suivant dit quand le rang maximum est atteint.

**Théorème 3.3.8** (i) Pour tout module aux  $q$ -différences  $M$  sur  $\mathbf{C}((z))$  et pour toute pente  $\mu \in S(M)$ , le plus grand sous-module pur isocline de pente  $\mu$  de  $M$  est de rang  $r_M(\mu)$ .

(ii) Pour tout module aux  $q$ -différences  $M$  sur  $\mathbf{C}(\{z\})$  et pour sa plus grande pente  $\mu := \max S(M)$ , le plus grand sous-module pur isocline de pente  $\mu$  de  $M$  est de rang  $r_M(\mu)$ .

*Preuve.* - Les détails de la démonstration se trouvent dans [24], théorème 3.1.1 p. 202. Le principe est le suivant. Si toutes les pentes de  $M$  sont entières, cela découle des théorèmes de factorisation 2.3.6 et 2.4.3 et de la description des suites exactes dans l'exemple 3.2.2. Dans le cas où les pentes de  $M$  ne sont pas toutes entières, on ramifie, i.e. on remplace le corps  $K$  par une extension cyclique de degré  $\ell$  convenable  $K' := K[z']$ , où  $z' = z^{1/\ell}$ , munie de l'automorphisme  $z' \mapsto q'z'$ , où  $q'$  est une racine  $\ell$ -ème de  $q$ . Le module  $M' := K' \otimes_K M$  admet un sous-module  $N'$  pur isocline de pente  $\mu$  de rang maximum. Il s'agit de le "redescendre", autrement dit, de trouver  $N \subset M$  tel que  $N' := K' \otimes_K N$ . C'est un problème de "descente galoisienne". D'après les deux corollaires de 3.3.2, tout automorphisme du module aux  $q'$ -différences  $M'$  laisse  $N'$  stable. Or les éléments du groupe de Galois de  $K'$  sur  $K$  sont de la forme  $z' \mapsto jz'$ , donc commutent avec  $\sigma_{q'}$ , donc sont des automorphismes de module aux  $q'$ -différences. La conclusion s'ensuit.  $\square$

### 3.3.4 Exercices d'application

**Exercice 3.3.9** Déterminer le polygone de Newton de  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ .

**Exercice 3.3.10** Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$  et  $\mu \in \mathbf{Z}$ . Comparer le polygone de Newton de  $z^\mu A$  à celui de  $A$ .

**Exercice 3.3.11** Soient  $A_1, \dots, A_k$  des matrices inversibles complexes de rangs  $r_1, \dots, r_k$  et soient  $\mu_1, \dots, \mu_k$  des entiers. Quel est le polygone de Newton de la matrice triangulaire par blocs 
$$\begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & z^{\mu_2} A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\mu_k} A_k \end{pmatrix} ?$$

**Exercice 3.3.12** Formuler et démontrer les propriétés *tensorielles* de la fonction de Newton.

# Chapitre 4

## Modules fuchsien et modules purs

Nous n'aborderons pas les aspects globaux de la fuchsianité : voir pour cela [23], [7] ou [19]. L'étude étant ici locale, nous supposons que  $K := \mathbf{C}((z))$  ("cas formel") ou  $K := \mathbf{C}(\{z\})$  ("cas analytique") et, bien entendu,  $\sigma := \sigma_q$ .

**Définition 4.0.13** (i) Un module pur isocline de pente 0 est dit *fuchsien*.

(ii) Un module *pur* est une somme directe de modules purs isoclines.

Rappelons que les modules purs isoclines ont été introduits par la définition 3.3.5. La propriété d'être pur isocline, resp. d'être fuchsien, resp. d'être pur, est évidemment inchangée par ramification *i.e.* passage à l'extension  $K' := K[z^{1/\ell}]$ .

Notre but, dans ce chapitre, est d'obtenir une classification raisonnablement complète (formelle et analytique) des modules purs.

### 4.1 Caractérisation des modules fuchsien

#### 4.1.1 Trois caractérisations équivalentes

Les critères suivants sont valables indifféremment dans les cas formel et analytique.

**Lemme 4.1.1** (i) Le module  $M := (K, \Phi_u)$ , où  $u \in K^*$ , est pur isocline de pente  $v(u)$ .

(ii) Soit  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  une suite exacte. Alors, pour que  $M$  soit pur isocline de pente  $\mu$ , il faut, et il suffit, que  $M'$  et  $M''$  le soient.

*Preuve.* - (i) découle de l'exemple 3.2.4 et du calcul (facile) du polygone de Newton de  $\sigma_q - u^{-1}$ .

(ii) découle immédiatement du théorème 3.3.3.  $\square$

**Proposition 4.1.2** Pour que le module  $M$  soit fuchsien, il faut, et il suffit, que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

(i) Il existe  $P := a_0 + \dots + a_n \sigma_q^n \in \mathcal{D}$  tel que  $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}P$  et :

$$(4.1.2.1) \quad n \geq 1, \quad v(a_0), \dots, v(a_n) \geq 0 \quad \text{et} \quad v(a_0) = v(a_n) = 0.$$

(i') Pour tout  $Q \in \mathcal{D}$  tel que  $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q$ , on a  $Q = a\sigma_q^\ell P$  pour un  $a \in K^*$ , un  $\ell \in \mathbf{Z}$ , et un  $P$  de la forme indiquée en (4.1.2.1).

(ii) Il existe  $A \in GL_n(K)$  tel que  $M \simeq (K^n, \Phi_A)$  et :

$$(4.1.2.2) \quad A(0) \in GL_n(\mathbf{C}), \text{ i.e. } A, A^{-1} \text{ définis en } 0.$$

(iii) Il existe  $A \in GL_n(\mathbf{C})$  telle que  $M \simeq (K^n, \Phi_A)$ .

Notons que, si  $M \simeq (K^n, \Phi_A)$  est fuchsien, on n'a pas d'information claire sur la forme de  $A$ . (Il en est d'ailleurs de même dans la théorie des équations et systèmes différentiels.)

*Preuve.* - Le fait que la fuchsianité équivaut aux conditions (i) et (i') est conséquence directe de la définition du polygone de Newton et du théorème 3.3.1.

Le fait que (i) implique (ii) se voit facilement en prenant pour  $A$  la matrice "compagnon" de  $P$  obtenue par vectorialisation au 3.1.1.

Pour voir que (ii) entraîne la fuchsianité, on remarque que l'on peut remplacer  $A$  par  $B := PAP^{-1}$  avec  $P \in GL_n(\mathbf{C})$ , car c'est un cas particulier de transformation de jauge, qui ne change donc pas la classe d'isomorphie de  $M$ ; par bon choix de la matrice de passage  $P$ , on peut supposer  $B(0) = PA(0)P^{-1}$  triangulaire. La description des suites exactes au 3.1.2 nous dit alors que le module  $M$  admet un "dévissage" :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

telle que  $M_i/M_{i-1} \simeq (K, \Phi_{b_i})$  où, par hypothèse,  $v(b_i) = 0$  : du lemme ci-dessus, on déduit alors que  $M$  est bien fuchsien.

Le fait que (iii) implique (ii) est complètement évident.

Le fait que (ii) implique (iii) ne l'est pas du tout et fait l'objet de 4.1.2.  $\square$

**Remarque 4.1.3** Le critère (ii) n'est autre que la définition utilisée par Birkhoff dans [7], alors que l'utilisation du polygone de Newton est due à Adams [1]. Dans le cas analytique, il existe de plus un critère portant sur la croissance et la décroissance des solutions méromorphes du système  $\sigma_q X = AX$  au voisinage de 0 dans les "secteurs"  $\mathbf{C}^* \setminus \{a_1, \dots, a_m\}q^{-\mathbf{N}}$  où elles sont définies.

## 4.1.2 Le "lemme fondamental"

**Définition 4.1.4** On dit que la matrice  $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  est *strictement fuchsienne* si :

$$A(0) \in GL_n(\mathbf{C}), \text{ i.e. } A, A^{-1} \in \text{Mat}_n(\mathbf{C}[[z]]).$$

On dit que  $A$  est *non résonnante* si de plus :

$$\forall c, d \in \text{Sp}(A(0)), d/c \notin q^{\mathbf{N}^*}.$$

**Lemme 4.1.5** Toute matrice strictement fuchsienne est équivalente à une matrice strictement fuchsienne non résonnante.

*Preuve.* - (Pour les détails, voir [23] 1.1.1, p. 1028.)

Soit  $A \in GL_n(K)$  strictement fuchsienne. Nous allons montrer plus précisément que  $A$  peut être rendue non résonnante à l'aide d'une transformation de jauge rationnelle, ce qui démontrera le

lemme aussi bien dans le cas analytique que dans le cas formel.

La transformation de  $A$  se réalise en alternant des transformations de jauges “constantes”, *i.e.* de matrices  $Q \in GL_n(\mathbf{C})$ , et des matrices de “shearing” (cisaillement), de la forme  $S_r := \begin{pmatrix} zI_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ .

L’algorithme est le suivant. S’il y a une résonance, autrement dit, si  $\text{Sp}(A(0))$  contient un sous-ensemble de la forme  $\{c, \dots, cq^m\}$  avec  $m \geq 1$ , on choisit un tel  $m$  le plus grand possible et on va le diminuer. Il existe  $Q \in GL_n(\mathbf{C})$  telle que :

$$Q^{-1}A(0)Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où  $B$  est triangulaire supérieure de diagonale  $cq^m I_r$  (pour un  $r \geq 1$ ) et où  $cq^m \notin \text{Sp}B$ . Alors la matrice  $A' := (\sigma_q(QS_r))^{-1}A(QS_r) \sim A$  est telle que :

$$A'(0) = \begin{pmatrix} q^{-1}B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où  $B$  est triangulaire supérieure de diagonale  $cq^{m-1}I_r$ , donc  $\text{Sp}(A'(0)) = \text{Sp}(A(0)) \setminus \{cq^m\}$ . En itérant ces améliorations, on élimine toutes les résonances.  $\square$

Par la même méthode, on obtient :

**Corollaire 4.1.6** *Le même algorithme permet de ramener le spectre de  $A(0)$  dans la couronne fondamentale  $C_q$  (voir 1.3.2).*

Et maintenant, un résultat utile entre tous !

**Théorème 4.1.7 (Le “lemme fondamental”)** (i) *Soit  $A \in GL_n(\mathbf{C}(\!(z)\!))$  strictement fuchsienne non résonnante. Il existe alors une unique transformation de jauge “tangente à l’identité” :*

$$F = I_n + zF_1 + \dots \in GL_n(\mathbf{C}[[z]])$$

telle que  $F[A(0)] = A$ .

(ii) *Si de plus  $A \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ , alors  $F \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$ .*

*Preuve.* - (Pour les détails, voir [23] 1.1.3, p. 1033.)

(i) On écrit  $F = \sum_{k \geq 0} z^k F_k$  (donc  $F_0 = I_n$ ) et  $A = \sum_{k \geq 0} z^k A_k$  (donc  $A_0 = A(0)$ ). La relation  $F[A(0)] = A$ , c’est-à-dire  $(\sigma_q F)A_0 = AF$ , équivaut à :

$$\forall k \geq 0, q^k F_k A_0 = \sum_{i+j=k} A_i F_j.$$

Pour  $k = 0$ , cette égalité est garantie par les hypothèses. Pour  $k \geq 1$ , elle prend la forme :

$$\Phi_{A_0, q^k A_0}(F_k) = A_1 F_{k-1} + \dots + A_k F_0,$$

où l’on a noté  $\Phi_{B,C}(X) := XC - BX$  : si  $B, C \in GL_n(\mathbf{C})$ , c’est un endomorphisme de  $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ , et si les spectres de  $B$  et  $C$  sont disjoints, c’en est même un automorphisme (exercice classique

d'algèbre linéaire). L'hypothèse de non résonance dit exactement que, si  $k \geq 1$ , les spectres de  $A_0$  et  $q^k A_0$  sont disjoints. Les  $F_k$  sont donc entièrement déterminés par la relation de récurrence :

$$F_0 := I_n \text{ et } \forall k \geq 1, F_k := (\Phi_{A_0, q^k A_0})^{-1} (A_1 F_{k-1} + \dots + A_k F_0).$$

(ii) On choisit une norme matricielle sur  $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ . L'hypothèse d'analyticité de  $A$  nous dit qu'il existe  $C, D > 0$  tels que :

$$\forall i \geq 0, \|A_i\| \leq CD^i$$

On choisit sur  $\text{End}(\text{Mat}_n(\mathbf{C}))$  une norme subordonnée à la norme matricielle choisie sur  $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ . Puisque  $|q| > 1$ , on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi_{A_0, q^k A_0})^{-1} = 0 \implies \exists C' > 0 : \forall k \geq 1, \left\| (\Phi_{A_0, q^k A_0})^{-1} \right\| \leq C'.$$

De la relation de récurrence trouvée en (i), on déduit alors :

$$\|F_k\| \leq C' \sum_{i=0}^{k-1} \|A_{k-i}\| \|F_i\| \leq CC' \sum_{i=0}^{k-1} D^{k-i} \|F_i\| \implies D^{-k} \|F_k\| \leq CC' \sum_{i=0}^{k-1} D^{-i} \|F_i\|.$$

Posant  $a_0 := 1$  et  $a_k := CC' \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ , on voit par récurrence : d'une part que  $D^{-k} \|F_k\| \leq a_k$  ; d'autre part que  $a_k = (1 + CC')^k$ , d'où enfin :

$$\|F_k\| \leq D^k (1 + CC')^k.$$

□

**Exercice 4.1.8** En utilisant la relation  $\sigma_q F = AFA_0^{-1}$ , prédire le rayon de convergence de  $F$ . De même, si  $A$  est rationnelle, en déduire que  $F$  admet un prolongement méromorphe à  $\mathbf{C}$  tout entier.

## 4.2 Classifications formelle et analytique des modules fuchsien

### 4.2.1 Classification formelle = classification analytique

**Proposition 4.2.1** (i) Soient  $A, B \in GL_n(\mathbf{C})$  et soit  $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  une transformation de jauge telle que  $F[A] = B$ . Alors  $F$  est un polynôme de Laurent.

(ii) Si l'on suppose de plus que  $\text{Sp}A, \text{Sp}B \subset C_q$  (couronne fondamentale, voir 1.3.2), alors cette transformation de jauge est une similitude :  $F \in GL_n(\mathbf{C})$ .

*Preuve.* - (i) Écrivant  $F = \sum z^k F_k$ , on doit avoir :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, q^k F_k A = B F_k.$$

Dès que  $k$  est assez grand (positif ou négatif), les spectres  $\text{Sp}(q^k A) = q^k \text{Sp}(A)$  et  $\text{Sp}(B)$  sont disjoints ; par le même argument que dans la preuve du théorème 4.1.7 (injectivité de  $\Phi_{B, q^k A}$ ), on a donc  $F_k = 0$ .

(ii) On a ici  $\text{Sp}(q^k A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$  pour tout  $k \neq 0$ , donc  $F = F_0$ . □

**Corollaire 4.2.2** Soient  $A, B \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$  des matrices de modules fuchsien analytiques et soit  $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  une transformation de jauge telle que  $F[A] = B$ . Alors  $F$  est analytique :  $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ . Autrement dit, pour les modules analytiques fuchsien, la classification formelle et la classification analytique sont identiques.

## 4.2.2 Quatre catégories équivalentes

Dans chacune des catégories abéliennes :

$$DiffMod(\mathbf{C}(z), \sigma_q) \subset DiffMod(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q) \subset DiffMod(\mathbf{C}((z)), \sigma_q),$$

la sous-catégorie pleine dont les objets sont fuchsien est elle-même abélienne d'après le lemme 4.1.1. Nous noterons temporairement  $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}'_f \subset \mathcal{E}''_f$  ces trois sous-catégories fuchsien.

Soit maintenant  $\mathcal{P}$  la catégorie pleine de  $DiffMod(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$  dont les objets sont les  $(K^n, \Phi_A)$  tels que  $A \in GL_n(\mathbf{C})$ . D'après la proposition 4.2.1, c'est une sous-catégorie de  $DiffMod(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$  (les morphismes sont tous rationnels). D'autre part, d'après le théorème 4.1.7, c'est une sous-catégorie essentielle de chacune des catégories  $\mathcal{E}_f, \mathcal{E}'_f, \mathcal{E}''_f$ . Ainsi, les inclusions :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}'_f \subset \mathcal{E}''_f$$

sont des équivalences de catégories. La classification formelle ou analytique des modules fuchsien formels, analytiques ou rationnels se ramène donc à la classification des  $(K^n, \Phi_A)$  tels que  $A \in GL_n(\mathbf{C})$ . Chacun de ceux-ci est à son tout équivalent à un  $(K^n, \Phi_A)$  tel que  $A \in GL_n(\mathbf{C})$  et  $Sp(A) \subset C_q$  (corollaire 4.1.6). Enfin, pour ces derniers, l'équivalence se confond avec la similitude (proposition 4.2.1).

**Théorème 4.2.3** Tout module fuchsien (formel, analytique ou rationnel) est équivalent à un  $(K^n, \Phi_A)$  tel que  $A \in GL_n(\mathbf{C})$  et  $Sp(A) \subset C_q$ , où  $A$  est unique à similitude près.

□

**Exercice 4.2.4** Les catégories ci-dessus sont équivalentes à la catégorie des fibrés vectoriels homomorphes plats sur la courbe elliptique  $\mathbf{E}_q$ .

## 4.3 Classifications formelle et analytique des modules purs

On sait *a priori* que deux modules purs sont isomorphes si, et seulement si, leurs composantes pures isoclines de mêmes pentes sont isomorphes deux à deux (cela découle de 3.3.2).

### 4.3.1 Modules purs isoclines de pente entière

**Lemme 4.3.1** (i) Soient  $A, A', F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  et  $u \in \mathbf{C}((z))^*$ . Alors  $F[A] = A' \Leftrightarrow F[uA] = uA'$ .  
(ii) Soient  $M := (K^n, \Phi_A)$  et  $M' := (K^n, \Phi_{A'})$ , où  $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  et  $A' = uA$ ,  $u \in \mathbf{C}((z))^*$ . Alors les pentes de  $M'$  sont celles de  $M$  augmentées de  $\lambda := v(u)$  :

$$\forall \mu \in \mathbf{Q}, r_{M'}(\mu) = r_M(\mu - \lambda).$$

*Preuve.* - (i) est évident.

(ii) est facile dans le cas de modules de rang 1, donc aussi dans le cas de matrices triangulaires (additivité de la fonction de Newton pour les suites exactes). D'après (i), la propriété est vraie pour  $A, A'$  si, et seulement si, elle l'est pour  $F[A], F[A']$ . Enfin, quitte à ramifier (ce qui n'affecte pas les conclusions) le théorème de factorisation formelle permet de se ramener (modulo une transformation de jauge) à une matrice triangulaire.  $\square$

**Remarque 4.3.2** L'assertion (ii) du lemme est un cas particulier des propriétés de la fonction de Newton relativement au produit tensoriel.

**Théorème 4.3.3** Soit  $\mu \in \mathbf{Z}$ .

(i) Le module de matrice  $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  est pur isocline de pente  $\mu$  si, et seulement si, le module de matrice  $z^{-\mu}A$  est fuchsien.

(ii) Tout module pur isocline de pente  $\mu$  est de la forme  $(K^n, \Phi_{z^\mu A})$  où  $A \in GL_n(\mathbf{C})$ .

(iii) L'application  $A \mapsto (K^n, \Phi_{z^\mu A})$  induit une bijection de l'ensemble des classes de similitude des matrices  $A \in GL_n(\mathbf{C})$  telles que  $Sp(A) \subset C_q$  sur l'ensemble des classes d'isomorphie de modules purs isoclines de pente  $\mu$  (formels, analytiques ou rationnels).

*Preuve.* - Cela découle du lemme ci-dessus et du théorème 4.2.3.  $\square$

### 4.3.2 Modules purs isoclines arbitraires

La classification des modules purs de pente rationnelle arbitraire a été obtenue par van der Put et Reversat [18].

**Lemme 4.3.4** Soient  $A, B \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$  deux matrices pures isoclines et soit  $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$  une transformation de jauge telle que  $F[A] = B$ . Alors  $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ .

*Preuve.* - Ramifier ne change ni l'hypothèse ni la conclusion car, si  $F(z^\ell)$  converge, alors  $F(z)$  converge. On peut donc se ramener au cas des pentes entières, traité plus haut. (Noter que la pente de  $A$  est celle de  $B$  sont nécessairement égales.)  $\square$

**Proposition 4.3.5** Pour les modules purs de pentes arbitraires, les classifications analytique et formelle coïncident.

*Preuve.* - Cela découle immédiatement du lemme.  $\square$

Nous nous placerons donc sur  $\mathbf{C}((z))$ .

**Modules irréductibles.** Suivant [18], la première étape consiste à déterminer les modules aux  $q$ -différences irréductibles (théorème 4.3.9).

**Définition 4.3.6** Un module aux  $q$ -différences est dit *irréductible* s'il est non nul et s'il n'admet pas de sous-module autre que lui-même et 0.



**Proposition 4.3.7** (i) Un module  $M$  est irréductible si, et seulement si tout élément non nul de  $M$  est un vecteur cyclique.

(ii) Les modules aux  $q$ -différences irréductibles sont les  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ -modules à gauche simples.

*Preuve.* - Le seul point non évident est que tout  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ -module à gauche simple est irréductible. Mais un  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ -module simple est nécessairement monogène et de torsion, donc de la forme  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$ , donc un module aux  $q$ -différences, dont l'irréductibilité coule alors de source.  $\square$

Un module aux  $q$ -différences irréductible  $M$  est, d'après le théorème 3.3.8, nécessairement pur isocline. Soient  $\mu$  sa pente,  $r = r_M(\mu)$  son rang et  $d := r\mu$  son degré. Si  $\mu$  est entier, le théorème de factorisation formelle entraîne que  $M$  est de rang 1 (car il peut être dévissé par des modules de rang 1). Réciproquement, un module de rang 1 est simple et pur isocline ; nous savons déjà classer ces modules.

On suppose donc que  $r \geq 2$  et l'on note  $K' := K[z^{1/r}] = K[z']$ ,  $q'$  une racine  $r$ -ième de  $q$ , et  $\mathcal{D}'$  l'anneau des opérateurs aux  $q'$ -différences sur  $K'$ . Le module aux  $q'$ -différences  $M' := K' \otimes_K M$  est pur isocline de pente  $r\mu = d$  et de rang  $r$ . Sa pente étant entière, il admet un dévissage :

$$0 = M'_0 \subset \cdots \subset M'_r = M'$$

tel que chaque quotient  $M'_i/M'_{i-1}$  est de rang 1. Considérons (par restriction des scalaires de  $\mathcal{D}'$  à  $\mathcal{D}$ ) ces modules comme des modules aux  $q$ -différences. L'inclusion  $M \subset M'$  (qui vient de l'inclusion  $K \subset K'$ ) est un morphisme dans  $\text{DiffMod}(\mathbf{C}((z)),\sigma_q)$ . Du dévissage ci-dessus et de la simplicité de  $M$ , il découle que  $M$  est un sous-module de l'un des  $M'_i/M'_{i-1}$ , donc lui est égal puisqu'ils ont même rang  $r$  sur  $K$ . On a donc prouvé que  $M$  provient par restriction des scalaires d'un module aux  $q'$ -différences de rang 1 sur  $K'$ . Ce dernier est isomorphe à  $(K', \Phi_{c'z'^d})$  pour un unique  $c \in \mathbf{C}^*$  tel que  $1 \leq |c| < |q'|$ .

**Lemme 4.3.8** Soit  $M$  le module aux  $q'$ -différences provenant par restriction des scalaires de  $\mathcal{D}'$  à  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$  de  $(K', \Phi_{c'z'^d})$ . Pour que  $M$  soit un module aux  $q$ -différences irréductible, il faut, et il suffit, que  $d$  et  $r$  soient premiers entre eux. Dans ce cas :

$$M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q} \left( \sigma_q^r - q'^{-dr(r-1)/2} c^{-r} z^{-d} \right).$$

*Preuve.* - Nous noterons pour simplifier  $\Phi := \Phi_{c'z'^d}$ . On a donc :

$$\forall m \in \mathbf{Z}, \forall x \in K', \Phi^m(x) = q'^{-dm(m-1)/2} c^{-m} z'^{-dm} \sigma^m(x).$$

Supposons d'abord que  $d$  et  $r$  sont premiers entre eux. Les  $z'^{-dm}$  pour  $0 \leq m \leq r-1$  sont alors linéairement indépendants sur  $\mathbf{C}((z))$ , et il en est donc de même des  $\Phi^m(1)$  pour  $0 \leq m \leq r-1$ , de sorte que 1 est un vecteur cyclique pour  $M$ . Comme  $\Phi^r(1) = q'^{-dr(r-1)/2} c^{-r} z^{-d}$ , on voit que  $M$  est isomorphe à  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$ , où  $P := \sigma_q^r - q'^{-dr(r-1)/2} c^{-r} z^{-d}$ . Le polygone de Newton de  $P$  a pour unique vecteur frontière  $(r,d)$  qui n'est pas somme de deux vecteurs qui lui sont proportionnels : le polygone ne peut être cassé,  $P$  ne peut être factorisé et  $M$  est irréductible.

Si au contraire  $r = r'\delta$  et  $d = d'\delta$  avec  $\delta > 1$ , les  $\Phi^m(1)$  avec  $0 \leq m < r'$  engendrent sur  $\mathbf{C}((z))$  un sous-espace de rang  $r'$  et 1 n'est pas cyclique :  $M$  n'est donc pas irréductible.  $\square$

Si  $a := c^r$ , nous noterons  $E(r,d,a)$  le module irréductible ci-dessus.

**Théorème 4.3.9** (i) Les modules aux  $q$ -différences irréductibles sont les  $E(r, d, a)$  où  $r \in \mathbf{N}^*$  et  $d \in \mathbf{Z}$  sont premiers entre eux et où  $1 \leq |a| < |q|$ .

(ii) Les modules  $E(r, d, a)$  et  $E(r', d', a')$  sont isomorphes si, et seulement si,  $(r', d', a') = (r, d, a)$ .

*Preuve.* - Seul (ii) reste à démontrer. Si  $E(r, d, a)$  et  $E(r', d', a')$  sont isomorphes, la comparaison des pentes et des rangs montre que  $r' = r$  et  $d' = d$ . Reprenons les mêmes notations que ci-dessus. Par extension des scalaires, on a l'isomorphisme de modules aux  $q'$ -différences :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - q'^{-dr(r-1)/2} a^{-1} z'^{-dr}) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - q'^{-dr(r-1)/2} a'^{-1} z'^{-dr}).$$

La transformation de jauge  $P \mapsto P^{[z'^{-d}]}$  donne alors :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - a^{-1}) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - a'^{-1}).$$

Par décomposition de chacun de ces modules en somme directe de  $r$  modules simples, on a des isomorphismes de la forme :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma - b) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma - b'),$$

où  $b$  est une racine  $r$ -ème de  $a^{-1}$  et  $b'$  une racine  $r$ -ème de  $a'^{-1}$ . Il existe donc un entier  $m$  tel que :

$$b' = q'^m b \implies a'^{-1} = q'^m a^{-1} \implies a' = a,$$

puisque  $a$  et  $a'$  sont dans la couronne fondamentale.  $\square$

**Exercice 4.3.10** Donner une description de  $E(r, d, a)$  sous la forme  $(K^r, \Phi_A)$ .

**Modules indécomposables.** Toujours suivant [18], la seconde étape consiste à déterminer les modules aux  $q$ -différences purs *indécomposables*, i.e. qui ne sont pas somme directe de deux sous-modules non nuls. Nous ne ferons que l'esquisser car leur description fait appel au produit tensoriel des modules aux  $q$ -différences, que nous avons choisi de ne pas étudier.

La conclusion est que tout module pur indécomposable<sup>1</sup> s'obtient par extensions successives non scindées de  $m$  copies d'un même module irréductible  $E(r, d, a)$ , et ceci, de manière "essentiellement unique". Autrement dit, notant  $E(r, d, a, m)$  le module ainsi obtenu :

**Théorème 4.3.11** *Tout module pur indécomposable est de la forme  $E(r, d, a, m)$  pour un unique quadruplet  $(r, d, a, m)$ . Tout module pur est somme directe de modules purs indécomposables.*

$\square$

**Remarque 4.3.12** De leur détermination des modules aux  $q$ -différences purs indécomposables, van der Put et Reversat déduisent alors une nouvelle démonstration simple et élégante de la classification (dûe à Atiyah) des fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe elliptique.

---

1. On prendra garde qu'un module indécomposable n'est pas automatiquement pur !

# Chapitre 5

## Modules irréguliers

### 5.1 Classification formelle

#### 5.1.1 Graduation canonique et stricte functorialité

#### 5.1.2 Classification

### 5.2 Classification analytique

[11, 16, 22]

#### 5.2.1 Filtration canonique et stricte functorialité, exactitude de $gr$

#### 5.2.2 Classes analytiques dans une classe formelle vs classes analytiques isoformelles

[5, 6, 21, 25]

### 5.3 Forme normale de Birkhoff-Guenter

[8]

#### 5.3.1 $q$ -Borel et la forme normale

#### 5.3.2 Exemple : $q$ -Euler

# Bibliographie

- [1] **Adams C.R.R., 1929.** On the linear ordinary  $q$ -difference equations. *Ann. Math. Ser. II*, 30(2) :195–205.
- [2] **André Y., 2000.** Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2) :705–740.
- [3] **André Y., 2000.** Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2) :741–756, 2000.
- [4] **André Y., 2008.** Slope filtrations. *Preprint*, arXiv :0812.3921, 2008.
- [5] **Babbitt D.G. and Varadarajan V.S., 1989.** *Local Moduli for Meromorphic Differential Equations*, Astérisque 169-170.
- [6] **Bézivin J.-P., 1992.** Sur les équations fonctionnelles aux  $q$ -différences. *Aequationes Math.*, 43, no. 2-3, 159–176.
- [7] **Birkhoff G.D., 1913.** The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations, *Proc. Amer. Acad.*, 49, pp. 521–568.
- [8] **Birkhoff G.D. and Guenther P.E., 1941.** Note on a Canonical Form for the Linear  $q$ -Difference System, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 27, No. 4, 218–222.
- [9] **Di Vizio L., 2002.** Arithmetic theory of  $q$ -difference equations. The  $q$ -analogue of Grothendieck-Katz conjecture on  $p$ -curvatures. *Invent. Math.*, 150, 517–578.
- [10] **Di Vizio L., Ramis J.-P., Sauloy J. and Zhang C., 2003.** Équations aux  $q$ -différences, *Gazette des mathématiciens*, no 96, SMF.
- [11] **Di Vizio L., 2009.** Local analytic classification of  $q$ -difference equations with  $|q| = 1$  *Journal of Noncommutative Geometry*, 3(1), 125–149. (ArXiv :0802.4223.)
- [12] **Di Vizio L. and Zhang C., 2009.** On  $q$ -summation and confluence, *Ann. Inst. Fourier*, 59 no. 1, 347–392.
- [13] **Gasper G. and Rahman M., 2004.** *Basic Hypergeometric Series* (second edition), Cambridge.
- [14] **Hardy G.H. and Wright E.M., 1979.** *Elementary Number Theory*, Oxford.
- [15] **Marotte F. et Zhang C., 2000.** Multisommabilité des séries entières solutions formelles d’une équation aux  $q$ -différences linéaire analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 50, no. 6, 1859–1890.
- [16] **Martinet J., Ramis J.-P., 1982** Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 55, 63–164.

- [17] **Ore O., 1933.** Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math.*, (2) 34, no. 3, 480–508.
- [18] **van der Put M. and Reversat M., 2007.** Galois theory of  $q$ -difference equations, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, vol. XVI, no 2, 1–54.
- [19] **van der Put M. and Singer M., 1997.** *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1666, Springer.
- [20] **Berndt B. C. and Rankin R. A. (eds), 2001.** *Ramanujan : Essays and Surveys*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, collection “History of Mathematics”, vol. 22.
- [21] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions to linear algebraic  $q$ -difference equations, *Annales de Fac. des Sciences de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, 53–94.
- [22] **Ramis J.-P., Sauloy J. and Zhang C., 2009.** Local analytic classification of  $q$ -difference equations. Submitted for publication.
- [23] **Sauloy J., 2000.** Systèmes aux  $q$ -différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Annales de l’Institut Fourier*, Tome 50, fasc. 4, 1021–1071.
- [24] **Sauloy J., 2004.** La filtration canonique par les pentes d’un module aux  $q$ -différences et le gradué associé. *Ann. Inst. Fourier*, 54, no 1, 181–210.
- [25] **Sauloy J.** Classification de modules aux différences filtrés isogradués. Submitted for publication.
- [26] **Sauloy J.** Équations aux  $q$ -différences linéaires : factorisation, résolution et théorèmes d’indices. Submitted for publication.
- [27] **Zhang C.,** On Mock Theta Functions, in preparation.