

Méthode de Mahler et conséquences sur les nombres automatiques

Première partie

Colin Faverjon

20 Novembre 2020

Préambule : méthode de Mahler

Soit $q \geq 2$ un entier. Une **fonction q -mahlérienne** $f(z)$ est une solution dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ d'une équation de la forme

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0,$$

$$p_0(z), \dots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z].$$

La **méthode de Mahler** est une méthode de transcendance visant à traduire l'absence de relations algébriques entre des fonctions mahlériennes, en une absence de relations algébriques entre les valeurs de ces fonctions aux points algébriques.

Dans ce premier exposé, nous nous placerons dans la situation où les fonctions sont q -mahlériennes, pour un entier q fixé, et où l'on n'évalue qu'en un seul point algébrique.

Complexité du développement d'un nombre réel

Définition.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, et $b \geq 2$ un entier. Le *développement en base b* de ξ est l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n \geq -n_0} \subset \{0, \dots, b-1\}$, $n_0 \geq 0$, telle que

- $\xi = \sum_n a_n b^{-n}$,
- $a_n \neq b-1$ pour une infinité d'entiers $n \geq -n_0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 0.333\ 333\ 333\ 333 \dots ,$$

$$(\sqrt{2})_{10} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048 \dots .$$

On s'attend à ce que tous les nombres algébriques irrationnels aient un développement **compliqué**.

Complexité des nombres algébriques

Conjecture (Borel, 1950).

Tout nombre algébrique irrationnel est absolument normal.

Soit $b \geq 2$ un entier et $T_b : \xi \in \mathbb{R} \mapsto b\xi \bmod \mathbb{Z}$. L'orbite de ξ en base b est l'ensemble

$$\mathcal{O}_b(\xi) := \{\xi, T_b\xi, T_b^2\xi, T_b^3\xi, \dots\} \subset [0, 1[.$$

L'ensemble $\mathcal{O}_b(\xi)$ est
dense dans $[0; 1[$

\Leftrightarrow

Toutes les combinaisons possibles de
chiffres apparaissent dans le
développement base b de ξ .

Que peut-on dire de l'orbite des nombres algébriques irrationnels?

Nombres automatiques



Figure – Un exemple d'automate

$$(114)_3 = 11020 \mapsto 1$$

Si a_n est la sortie de l'automate quand il lit $(n)_3$,

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$$

Définition.

On dit qu'un nombre réel ξ est **q -automatique en base b** s'il existe un automate fini qui écrit le n -ième chiffre du développement en base b de ξ quand il lit l'écriture de l'entier n en base q .

Théorème (Adamczewski & Bugeaud, 2004).

Un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant.

Lien avec les fonctions mahlériennes

La série génératrice $f(z)$ d'une suite engendrée par un automate fini est solution d'une équation de la forme

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0,$$

$$p_0(z), \dots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z].$$

Une telle équation est appelée **équation q -mahlérienne homogène d'ordre m** , et une solution dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ d'une telle équation est appelée **fonction q -mahlérienne**.

Conjecture de Cobham (1968).

Soient $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ une fonction mahlérienne et $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha)$ est défini. Alors, $f(\alpha)$ est **soit rationnel, soit transcendant**.

- 1 La méthode de Mahler
 - L'approche de K. Mahler
 - Le théorème de Nishioka
 - Le théorème de Philippon
- 2 La conjecture de Cobham
 - Énoncé du théorème principal
 - Démonstration
 - Application aux nombres automatiques
- 3 Relations algébriques entre les valeurs de fonctions mahlériennes
 - Phénomène des vases communicants
 - Relations orbitales

Les travaux de Mahler

$$f_2(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{2^n}$$

Propriété (Mahler, 1929).

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$. Le nombre $f_2(\alpha)$ est transcendant.

Esquisse de démonstration.

$$f_2(z^2) = f_2(z) - z.$$

Si $f_2(\alpha) \in \mathbb{K}$, \mathbb{K} un corps de nombre, alors $f_2(\alpha^{2^k}) \in \mathbb{K}(\alpha)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
On construit un approximant de Padé des puissances de $f_2(z)$ d'ordre supérieur à γs^2 , $\gamma > 0$,

$$E(z) = q_0(z) + q_1(z)f_2(z) + \cdots + q_s(z)f_2(z)^s, \quad q_i(z) \in \mathbb{Q}[z], \deg(q_i) \leq s.$$

On trouve $\delta, \theta > 0$ tels que, pour tout k assez grand,

$$\log \left| E(\alpha^{2^k}) \right| \leq -\delta 2^k s^2, \quad \text{et} \quad \log \left| E(\alpha^{2^k}) \right| \geq -\theta 2^k s.$$

Les équations inhomogènes d'ordre 1

Théorème (Mahler, 1929).

Soit $q \geq 2$ un entier et $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ une fonction transcendante, solution d'une équation de la forme

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) = r(z) \quad p_0(z), p_1(z), r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z).$$

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $p_0(\alpha^{q^k})p_1(\alpha^{q^k}) \neq 0$ pour tout k . Alors $f(\alpha)$ est transcendant.

Soit $f(z) := \prod_n (1 - 2z^{2^n})$. C'est une fonction transcendante. On a

$$f(z) + (2z - 1)f(z^2) = 0.$$

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, et $\alpha \notin \left\{ \xi : \xi^{2^k} = \frac{1}{2} \text{ pour un } k \in \mathbb{N} \right\}$, alors, $f(\alpha)$ est transcendant. Cependant, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Systemes d'ordre ≥ 2

Que se passe-t-il pour les systemes d'ordre supérieur ou égal à 1, *i.e.*

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = r(z),$$

avec $m \geq 2$?

Le fait que $f(\alpha)$ soit algébrique n'implique plus l'algébricité d'aucun des nombres $f(\alpha^q), \dots, f(\alpha^{q^m})$.

Cela implique seulement qu'il y a une relation $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéaire entre les nombres $f(\alpha^q), \dots, f(\alpha^{q^m})$:

$$p_1(\alpha)f(\alpha^q) + \cdots + p_m(\alpha)f(\alpha^{q^m}) = r(\alpha) - p_0(\alpha)f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Système mahlérien

Toute fonction q -mahlérienne est également la coordonnée d'un vecteur solution d'un **système q -mahlérien**

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}, \quad A(z) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z)).$$

Définition.

Un point algébrique α est une **singularité** d'un système q -mahlérien s'il existe un entier k tel que α^{q^k} est une singularité de la matrice $A(z)$. Un point $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ est **régulier** si ce n'est pas une singularité.

Si le système possède une singularité η , alors il en possède une infinité :

$$\left\{ \xi : \xi^{q^k} = \eta \text{ pour un } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Le théorème de Nishioka

Théorème de Nishioka (1990).

Soient $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des séries entières formant un vecteur solution d'un système q -mahlérien. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier. On a l'égalité

$$\deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = \deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)).$$

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Baum-Sweet, et $\mathbf{b}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$. On a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}(z) \\ \mathbf{b}(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}(z^2) \\ \mathbf{b}(z^4) \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que $\mathbf{b}(z)$ et $\mathbf{b}(z^2)$ sont algébriquement indépendantes.

Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, on a

$$\deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{b}(\alpha), \mathbf{b}(\alpha^2)) = \deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(\mathbf{b}(z), \mathbf{b}(z^2)) = 2.$$

En particulier, $\mathbf{b}(\alpha)$ est transcendant.

Idée de démonstration (1)

On suppose $f_1(z), \dots, f_m(z)$ algébriquement indépendantes, et $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ algébriquement dépendants. On écrit

$$\sum_{\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda} \tau_{\lambda} f_1(\alpha)^{\lambda_1} \cdots f_m(\alpha)^{\lambda_m} = 0, \quad \tau_{\lambda} \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad \Lambda \subset \mathbb{N}^m \text{ finie}.$$

En itérant l'équation mahlérienne, on trouve des $\tau_{k, \lambda} \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_{k, \lambda} f_1(\alpha^{q^k})^{\lambda_1} \cdots f_m(\alpha^{q^k})^{\lambda_m} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\tau_k := (\tau_{k, \lambda})_{\lambda \in \Lambda}$, et $\mathbf{t} := (t_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ des indéterminées. On définit

$$F(\mathbf{t}, z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} t_{\lambda} f_1(z)^{\lambda_1} \cdots f_m(z)^{\lambda_m} \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{t}][[z]].$$

On a

$$F(\tau_k, \alpha^{q^k}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Idée de démonstration (2)

On construit un approximant de Padé des puissances de $F(\mathbf{t}, z)$

$$E(\mathbf{t}, z) = P_0(\mathbf{t}, z) + P_1(\mathbf{t}, z)F(\mathbf{t}, z) + \cdots + P_s(\mathbf{t}, z)F(\mathbf{t}, z)^s,$$

avec $P_0, \dots, P_s \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{t}, z]$ de degré inférieur à s .

Majoration. On peut garantir un grand ordre d'annulation de $E(\mathbf{t}, z)$ en $z = 0$, et obtenir

$$\log |E(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k})| \leq -\gamma s^2 q^k, \quad \gamma > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ assez grand.}$$

Minoration. Comme $F(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k}) = 0$, $E(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k}) = P_0(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k}) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si on peut garantir que $P_0(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k}) \neq 0$ pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Liouville donne

$$\log |P_0(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k})| \geq -\delta s q^k, \quad \delta > 0, \quad \text{pour une infinité de } k \in \mathbb{N}.$$

Contradiction. $-\delta s q^k \leq \log |E(\boldsymbol{\tau}_k, \alpha^{q^k})| \leq -\gamma s^2 q^k$, impossible dès que $s \geq \delta/\gamma$.

Limites du théorème de Nishioka

Le théorème de Nishioka étend largement la portée de la méthode de Mahler, puisqu'il s'applique à tous les systèmes.

Il reste toutefois deux obstacles pour démontrer la conjecture de Cobham.

- **On ne sait pas ce qu'il se passe aux singularités.** Reprenons le système $f(z) = (1 - 2z)f(z^2)$. Que se passe-t-il aux points

$$\left\{ \xi : \xi^{2^k} = \frac{1}{2} \text{ pour un } k \in \mathbb{N} \right\} ?$$

- **La transcendance de $f(z)$ n'implique pas celle de $f(\alpha)$,** même si α est un point régulier.

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & 1 - 2z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix}$$

$$\deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \left(f \left(\frac{1}{2} \right), f \left(\frac{1}{4} \right) \right) = \deg.\text{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} (f(z), f(z^2)) = 1$$

Le théorème de Philippon

Théorème de Philippon, version homogène (2017).

Sous les hypothèses du théorème de Nishioka, soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme homogène tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$. Alors, il existe un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_m]$, homogène et de **même degré** que P en X_1, \dots, X_m , tel que

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \text{ et } Q(\alpha, X_1, \dots, X_m) = P(X_1, \dots, X_m).$$

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z & z+z^2 \\ z^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix}$$

Si $f_1(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe $p_1(z), p_2(z), r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ premiers entre eux, tels que

$$p_1(z)f_1(z) + p_2(z)f_2(z^3) + r(z) = 0 \text{ et } p_2(\alpha) = 0.$$

La seule relation linéaire est $f_1(z) + f_2(z) + \frac{1}{z-1} = 0$. Donc $f_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Avantages et limites du théorème de Philippon

Revenons à l'exemple de la suite de Baum-Sweet.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{b}(z) \\ \mathfrak{b}(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{b}(z^2) \\ \mathfrak{b}(z^4) \end{pmatrix}.$$

Pour démontrer la transcendance de $\mathfrak{b}(\alpha)$, il suffit de démontrer que les fonctions 1 , $\mathfrak{b}(z)$ et $\mathfrak{b}(z^2)$ sont **linéairement indépendantes** sur $\mathbb{Q}(z)$.

Avantage du théorème de Philippon. Soit $f(z)$ une fonction mahlérienne transcendante considérée dans un **système minimal** contenant la fonction identiquement égale à 1. En un point régulier α , le nombre $f(\alpha)$ est transcendant.

Obstacle restant. Le théorème ne dit toujours rien sur ce qu'il se passe aux singularités du système.

- 1 La méthode de Mahler
 - L'approche de K. Mahler
 - Le théorème de Nishioka
 - Le théorème de Philippon
- 2 La conjecture de Cobham
 - Énoncé du théorème principal
 - Démonstration
 - Application aux nombres automatiques
- 3 Relations algébriques entre les valeurs de fonctions mahlériennes
 - Phénomène des vases communicants
 - Relations orbitales

La conjecture de Cobham

Conjecture de Cobham (1968).

Soient $f(z) \in \mathbb{Q}\{z\}$ une fonction mahlérienne et $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha)$ est défini. Alors, $f(\alpha)$ est **soit transcendant, soit rationnel**.

Théorème 1.

Soient \mathbb{K} un corps de nombres, $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ une fonction mahlérienne et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha)$ est défini. Alors, $f(\alpha)$ est **soit transcendant, soit dans $\mathbb{K}(\alpha)$** .

On ne peut pas se soustraire à l'alternative présente dans le théorème.

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z - z^2 & \frac{z^2}{1-z^3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est une singularité, $f(\varphi) = \frac{\varphi^2}{1-\varphi^3} = -\frac{\varphi}{2} \in \mathbb{Q}(\varphi)$.

Deux remarques sur le théorème 1

Théorème 1.

Soient \mathbb{K} un corps de nombres, $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ une fonction mahlérienne et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha)$ est défini. Alors, $f(\alpha)$ est soit transcendant, soit dans $\mathbb{K}(\alpha)$.

Le théorème ne fait aucune mention du système ou de l'équation dans laquelle apparaît la fonction $f(z)$. En particulier, on ne connaît pas les relations linéaires qu'il peut exister entre les fonctions.

Le théorème s'applique à l'ensemble des points algébriques non-nuls du disque unité. Il n'est plus besoin de vérifier que α n'est pas une singularité du système.

Un exemple

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z - z^2 & z^2 - z - 1 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Que dire de $f(z)$ au point $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$? C'est une singularité, le théorème de Philippon ne s'applique pas.

On peut "grossir" artificiellement ce système.

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - z^2 & 2z^2 - z - z^4 & z^4 - z^2 - 1 & z + z^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ f(z^8) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant une relation linéaire entre les fonctions du système

$$f(z) - (1 + z - z^2)f(z^2) + (1 + z - z^2)f(z^4) - z = 0.$$

On en déduit que $f(\varphi) = \varphi \in \mathbb{Q}(\varphi)$.

Démonstration du théorème 1

Lemme.

Sous les hypothèses du théorème, il existe un système mahlérien pour lequel

- α est un point régulier ;
- $f(z)$ est la première coordonnée d'un vecteur solution ;
- les coordonnées de ce vecteur sont dans $\mathbb{K}\{z\}$.

Démonstration du théorème 1. On considère le système donné par le lemme, auquel on ajoute la fonction 1. Si $f(\alpha) = f_1(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, on a une relation linéaire entre 1 et $f_1(\alpha)$. D'après le théorème de Philippon, il existe $q_0(z), \dots, q_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ p.e.e., tels que

$$q_0(z) + q_1(z)f_1(z) + \dots + q_m(z)f_m(z) = 0, \text{ et } q_2(\alpha) = \dots = q_m(\alpha) = 0.$$

Comme les fonctions sont dans $\mathbb{K}\{z\}$, on peut choisir les $q_i(z)$ dans $\mathbb{K}[z]$.

Transcendance des nombres automatiques irrationnels

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas automatique. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est q -automatique dans une base entière b . Notons $f(z) \in \mathbb{Q}\{z\}$ la série génératrice d'un automate engendrant le développement en base b de $\sqrt{2}$. On a $f(\frac{1}{b}) = \sqrt{2}$. Donc, d'après le théorème 1, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, une contradiction.

Soit $\beta > 1$ un réel, et $T_\beta : \xi \mapsto \beta\xi \pmod{1}$. Le β -développement d'un réel $\xi \in [0, 1[$ est défini par

$$(\xi)_\beta := 0.a_1a_2a_3 \cdots, \quad \text{où } a_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1} \xi \rfloor, i \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

On a $\xi = \sum_n a_n \beta^{-n}$.

Corollaire du théorème 1.

Soit $\beta > 1$ un nombre algébrique, et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}(\beta)$. Le β -développement de ξ ne peut pas être produit par un automate fini.

- 1 La méthode de Mahler
 - L'approche de K. Mahler
 - Le théorème de Nishioka
 - Le théorème de Philippon
- 2 La conjecture de Cobham
 - Énoncé du théorème principal
 - Démonstration
 - Application aux nombres automatiques
- 3 Relations algébriques entre les valeurs de fonctions mahlériennes
 - Phénomène des vases communicants
 - Relations orbitales

Un exemple d'ordre 1

Considérons la fonction $f(z) = \sum_n (1 - 2z^{2^n})$.

Elle est solution de l'équation $f(z) = (1 - 2z)f(z^2)$. La relation $f(\frac{1}{2}) = 0$ provient du fait qu'au point $\frac{1}{2}$, la "matrice" du système est égale à 0.

Dans le système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & 1 - 2z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix},$$

le point $\frac{1}{2}$ est régulier. Cette fois-ci, la relation $f(\frac{1}{2}) = 0$ provient de la spécialisation au point $\frac{1}{2}$ de la relation fonctionnelle

$$f(z) + (2z - 1)f(z^2) = 0.$$

Un autre exemple

Reprenons le système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z - z^2 & z^2 - z - 1 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $f(\varphi) = \varphi$ ($= \frac{1-\sqrt{5}}{2}$). On peut voir cela en constatant que le vecteur $(1, 0, -\varphi)$ est dans le noyau (à gauche) de la matrice du système au point φ .

Dans le système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - z^2 & 2z^2 - z - z^4 & z^4 - z^2 - 1 & z + z^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ f(z^8) \\ 1 \end{pmatrix},$$

on trouve $f(\varphi) = \varphi$ en spécialisant la relation linéaire

$$f(z) - (1 + z - z^2)f(z^2) + (1 + z - z^2)f(z^4) - z = 0.$$

Valeurs des fonctions d'un système

Principe. Les relations linéaires entre les valeurs des solutions d'un système mahlérien ont deux origines :

- l'une est fonctionnelle ;
- l'autre est matricielle.

Plus précisément, étant données des fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ formant un vecteur solution d'un système q -mahlérien, de matrice $A(z)$. On considère un entier ℓ tel que α^{q^ℓ} est régulier, et on note

$$A_\ell(z) := A(z)A(z^q)A(z^{q^2}) \cdots A(z^{q^{\ell-1}}).$$

Propriété.

$$(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))^\perp = \ker A_\ell(\alpha) + \text{ev}_\alpha(f_1(z), \dots, f_m(z))^\perp.$$

Valeurs de fonctions mahlériennes quelconques

Soient $f_1(z), \dots, f_r(z)$ des fonctions q -mahlériennes, et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$. On peut réunir toutes ces fonctions dans un grand système q -mahlérien, pour lequel le point α est régulier.

D'après le théorème de Philippon, toute relation algébrique entre les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$ est la spécialisation au point α d'une relation algébrique de même degré, entre **l'ensemble des fonctions du système**.

Problème : Pour former ce système mahlérien, on a potentiellement dû ajouter plein de fonctions $f_{r+1}(z), \dots, f_m(z)$ dont on ne sait rien.

Remarque : On peut toujours choisir les fonctions $f_{r+1}(z), \dots, f_m(z)$ parmi l'ensemble des fonctions

$$\left\{ f_1(z^{q^\ell}), \dots, f_r(z^{q^\ell}), \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

Relations orbitales

Soit $f_1(z), \dots, f_r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$. Une **relation q -orbitale** entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ est un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \mathbf{X}]$ tel que

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_r(z), f_1(z^q), \dots, f_1(z^{q^\ell}), \dots, f_r(z^{q^\ell})) = 0.$$

Théorème 2.

Soient $f_1(z), \dots, f_r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions q -mahlériennes et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ un point du domaine d'holomorphie de chaque fonction. Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ homogène, tel que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = 0.$$

Il existe une relation q -orbitale $Q(z, \mathbf{X})$ homogène de même degré que P en \mathbf{X} , telle que

$$Q(\alpha, \mathbf{X}) = P(X_1, \dots, X_r).$$

Exemples

Exemple 1. Reprenons $f(z) = \sum_n (1 - 2z^{2^n})$. La relation $f(\frac{1}{2}) = 0$ est la spécialisation au point $\frac{1}{2}$ de la relation orbitale

$$f(z) + (2z - 1)f(z^2) = 0.$$

Exemple 2. Reprenons le système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z - z^2 & z^2 - z - 1 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Au point $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ on a une relation entre la fonction $f(z)$ et la fonction constante, égale à 1 : $f(\varphi) - \varphi = 0$. Cette relation est la spécialisation au point φ de la relation orbitale

$$f(z) - (1 + z - z^2)f(z^2) + (1 + z - z^2)f(z^4) - z = 0.$$