# Méthode de Mahler et conséquences sur les nombres automatiques

## Seconde partie

Colin Faverjon

27 Novembre 2020

# Fonctions mahlériennes

Une fonction $q$-mahlérienne $f(z)$ est une solution dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ d'une équation mahlérienne :

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,,$$

$p_0(z), \ldots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Toute fonction $q$-mahlérienne est également la première coordonnée d'un vecteur solution dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}^m$ d'un système mahlérien :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}, \quad A(z) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))\,.$$

La méthode de Mahler a pour but de traduire l'absence de relations entre fonctions mahlériennes en une absence de relations entre leurs valeurs aux points algébriques.

# Valeurs de fonctions $q$-mahlériennes en un point

**Théorème de Philippon (2015 & 2017).**

Soit $f_1(z), \ldots, f_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ formant un vecteur solution d'un système $q$-mahlérien et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier† pour ce système. Toute relation algébrique (homogène) sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ provient, par spécialisation au point $\alpha$, d'une relation algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (homogène) de même degré entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

†Un point $\alpha$ est régulier si la matrice $A(\alpha^{q^k})$ est définie et inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En particulier, si les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

## Valeurs de fonctions $q$-mahlériennes en un point

**Théorème (Conjecture de Cobham), 2017.**

Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ une fonction mahlérienne et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, du domaine de définition de $f(z)$. Alors, $f(\alpha)$ est soit transcendant, soit dans $\mathbb{K}(\alpha)$.

Il existe un algorithme pour déterminer si $f(z)$ est définie au point $\alpha$ et, le cas échéant, si $f(\alpha)$ est algébrique ou transcendant.

Considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Baum-Sweet : $a_n = 0$ si $(n)_2$ contient un bloc de $0$ de taille impaire, et $a_n = 1$ sinon. Soit $b \geq 2$ un entier. Le nombre $\xi_b := \sum_n \frac{a_n}{b^n}$ est transcendant. En effet,

$$f(z) + zf(z^2) - f(z^4) = 0, \qquad \text{où } f(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n .$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique, donc $\xi_b \notin \mathbb{Q}$. D'après la conjecture de Cobham, $\xi_b = f(1/b)$ est transcendant.

# Valeurs de fonctions $q$-mahlériennes en un point

## Théorème des relations orbitales, 2017.

Soient $f_1(z),\dots,f_r(z)\in\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions $q$-mahlériennes et $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^\star$ un point du domaine de définition de chaque fonction. Toute relation algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha),\dots,f_r(\alpha)$ provient, par spécialisation au point $\alpha$, d'une relation sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de même degré entre les fonctions

$$f_1(z),f_2(z),\dots,f_r(z),f_1(z^q),\dots,f_r(z^q),\dots,f_1(z^{q^\ell}),\dots,f_r(z^{q^\ell})\,.$$

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} f(z)\\ g(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ z^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(z^2)\\ g(z^2)\end{pmatrix}.$$

On a $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, pourtant $f(z)$ et $g(z)$ sont linéairement indépendantes. Cette relation est la spécialisation au point $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de

$$f(z)+(2z^2-1)f(z^2)=2g(z)\,.$$

# Parallèle avec la théorie des $E$-fonctions

| | **$E$-fonctions de Siegel** | **Fonctions mahlériennes** |
|---|---|---|
| *Systèmes* | Systèmes différentiels | Systèmes mahlériens |
| *Égalité des degrés de transcendance* | Siegel-Shidlovskii (1969) | Ku. Nishioka (1990) |
| *Relever les relations entre les valeurs* | Beukers (2006) | Philippon (2015), Adamczewski & Faverjon (2017) |
| *Algorithme pour déterminer la transcendance des valeurs* | Adamczewski & Rivoal (2018) | Adamczewski & Faverjon (2018) |

# Quelques questions

- Soit $f(z)$ une fonction mahlérienne, et $\alpha, \beta$ des points algébriques. Que dire des nombres $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ?

  *Soit $\xi_2$ (resp. $\xi_3$) le nombre dont le développement en base $2$ (resp. $3$) est la suite de Baum-Sweet. Les nombres $\xi_2$ et $\xi_3$ sont transcendants. Sont-ils algébriquement indépendants ?*

- Soient $f(z)$, $g(z)$ des fonctions respectivement $q_1$, $q_2$-mahlériennes. Que peut-on dire des valeurs de $f(z)$ et $g(z)$ aux points algébriques ?

  *Soit $g(z) = \sum_n z^{3^n}$. Les nombres $\xi_2$, $g(1/2)$ et $g(1/3)$ sont transcendants. Sont-ils algébriquement indépendants ?*

- Soient $f(z)$, $g(z)$ des fonctions respectivement $q_1$, $q_2$-mahlériennes. Est-il possible que $f(z)$ et $g(z)$ soient algébriquement dépendantes ?

# Systèmes dynamiques

Soit $b \geq 2$ un entier et $T_b : \xi \in \mathbb{R} \mapsto b\xi \mod \mathbb{Z}$. L'orbite de $\xi$ en base $b$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}_b(\xi) := \{\xi, T_b\xi, T_b^2\xi, T_b^3\xi, \ldots\} \subset [0,1[\,.$$

La dimension (de Hausdorff) de $\overline{\mathcal{O}_b(\xi)}$ mesure la *complexité* du développement de $\xi$ en base $b$.

Soit $\chi$ le nombre dont le développement en base $2$ est donné par la suite de Baum-Sweet :

$$\begin{aligned} (\chi)_2 &:= 0.101\,100\,101\,001\,001\,100\,100\,000\,100\cdots \\ (\chi)_{10} &:= 0.697\,557\,483\,466\,884\,517\,195\,587\,961\cdots \end{aligned}$$

On a $\dim \overline{\mathcal{O}_2(\chi)} = 0$. Que peut-on dire de $\mathcal{O}_{10}(\chi)$ ?

# La conjecture de Furstenberg

## Conjecture de Furstenberg (1970).

Soit $b_1, b_2 \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants†, et $\xi$ un nombre réel irrationnel. Alors

$$\dim \overline{\mathcal{O}_{b_1}(\xi)} + \dim \overline{\mathcal{O}_{b_2}(\xi)} \geq 1\,.$$

† Deux nombres $x, y$ sont multiplicativement indépendants si $\log(x)/\log(y) \notin \mathbb{Q}$.

Si un nombre réel irrationnel a un développement *trop simple* dans une base donnée, alors son développement dans toute autre base multiplicativement indépendante est *compliqué*.

$$\begin{aligned}(\chi)_2 &:= 0.101\,100\,101\,001\,001\,100\,100\,000\,100\cdots\\(\chi)_{10} &:= 0.697\,557\,483\,466\,884\,517\,195\,587\,961\cdots\end{aligned}$$

Puisque $\dim \overline{\mathcal{O}_2(\chi)} = 0$, l'ensemble $\mathcal{O}_{10}(\chi)$ est dense.

# Les nombres automatiques

Une catégorie de nombres dont l'orbite en base $b$ a dimension $0$ est l'ensemble des nombres automatiques en base $b$.

**Rappel.** On dit qu'un nombre réel $\xi$ est automatique en base $b$ si son développement en base $b$ peut être engendré par un automate fini.

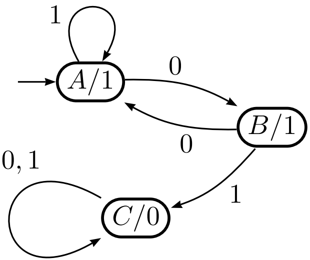


Figure – Un automate engendrant la suite de Baum-Sweet

# Automaticité et changement de base

On énonce un cas particulier de la conjecture de Furstenberg.

**Conjecture A.**

Un nombre réel irrationnel ne peut pas être automatique dans deux bases multiplicativement indépendantes.

$$\begin{aligned}(\chi)_2 &:= 0.101\,100\,101\,001\,001\,100\,100\,000\,100\cdots\\ (\chi)_{10} &:= 0.697\,557\,483\,466\,884\,517\,195\,587\,961\cdots\end{aligned}$$

Il n'existe aucun automate fini capable de produire le développement décimal de $\chi$.

# Indépendance algébrique des nombres automatiques

La conjecture A découle d'une conjecture plus large.

**Conjecture B.**

Soit $b_1, \dots, b_r$ des entiers multiplicativement indépendants[†] et, pour chaque $i$, un nombre irrationnel $\xi_i$ automatique en base $b_i$. Les nombres $\xi_1, \dots, \xi_r$ sont algébriquement indépendants.

[†] Des nombres complexes $x_1, \dots, x_r$ sont multiplicativement indépendants si le seul $r$-uplet d'entiers $(n_1, \dots, n_r)$ pour lequel $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} = 1$ est le $r$-uplet nul.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Baum-Sweet. Le nombre $\chi = \sum_n a_n 2^{-n}$ est algébriquement indépendant de tout nombre automatique en base $10$.

Les nombres suivant sont algébriquement indépendants :

$$\sum_n \frac{a_n}{2^n}, \sum_n \frac{a_n}{3^n}, \sum_n \frac{a_n}{5^n}, \sum_n \frac{a_n}{7^n}, \sum_n \frac{a_n}{11^n}, \dots$$

# Indépendance algébrique des nombres automatiques

La conjecture A découle d'une conjecture plus large.

**Conjecture B.**

Soit $b_1, \ldots, b_r$ des entiers multiplicativement indépendants† et, pour chaque $i$, un nombre irrationnel $\xi_i$ automatique en base $b_i$. Les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont algébriquement indépendants.

†Des nombres complexes $x_1, \ldots, x_r$ sont multiplicativement indépendants si le seul $r$-uplet d'entiers $(n_1, \ldots, n_r)$ pour lequel $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} = 1$ est le $r$-uplet nul.

Les nombres

$$\sum_{\substack{n=a^2+b^2+c^2 \\ (a,b,c)\in\mathbb{N}^3}} 2^{-n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-3^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathcal{C}_3} 10^{-n},$$

sont algébriquement indépendants, où $\mathcal{C}_3$ est l'ensemble triadique de Cantor.

# Lien avec les fonctions mahlériennes

**Propriété (Cobham, 1968).** La série génératrice d'une suite $q$-automatique est une fonction $q$-mahlérienne.

La série génératrice $f(z) := \sum_n a_n z^n$ de la suite de Baum-Sweet est solution de l'équation

$$f(z) + zf(z^2) - f(z^4) = 0\,.$$

**Théorème 1.**

Soient $r \geq 1$ un entier, $\mathbb{K}$ un corps de nombres et, pour $1 \leq i \leq r$, une fonction $q_i$-mahlérienne $f_i(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ et un point $\alpha_i \in \mathbb{K}$ de son domaine de définition. Sous l'une des deux hypothèses suivantes :

1. les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants,
2. les entiers $q_1, \ldots, q_r$ sont multiplicativement indépendants $2$ à $2$,

les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants dès qu'aucun d'eux n'appartient à $\mathbb{K}$.

# Application à la suite de Baum-Sweet

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}\{z\}$ la série génératrice de la suite de Baum-Sweet, et $\chi = f(1/2)$. On veut montrer que $\chi$ n'est pas automatique en base $10$.

**Théorème 1, premier point.**

Soit $r \geq 2$ un entier et, pour $1 \leq i \leq r$, une fonction mahlérienne $f_i(z)$ et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ de son domaine de définition tel que $f_i(\alpha_i)$ est transcendante. Si les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants, alors les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

Soit $g(z) \in \mathbb{Q}\{z\}$ la série génératrice de $(\chi)_{10}$. Si cette suite est automatique, alors $g(z)$ est une fonction mahlérienne. On a par ailleurs

$$g\left(\frac{1}{10}\right) = \chi = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Les nombres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{10}$ sont multiplicativement indépendants. D'après le théorème 1 on a $\chi \in \overline{\mathbb{Q}}$, une contradiction.

# Démonstration de la conjecture B

**Conjecture B.**

Soit $b_1, \ldots, b_r$ des entiers multiplicativement indépendants et, pour chaque $i$, un nombre irrationnel $\xi_i$ automatique en base $b_i$. Les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont algébriquement indépendants.

*Démonstration*. Soit $f_i(z)$ la série génératrice de la suite automatique associée à $\xi_i$, de sorte que $\xi_i = f_i(1/b_i)$. Comme les entiers $b_1, \ldots, b_r$ sont multiplicativement indépendants, c'est également le cas des nombres $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_r}$. D'après le premier point du théorème 1, les nombres

$$\xi_1 = f_1\left(\frac{1}{b_1}\right), \ldots, \xi_r = f_r\left(\frac{1}{b_r}\right)$$

sont algébriquement indépendants.

# Le théorème de Cobham

Soient $p$ et $q$ des entiers multiplicativement indépendants.

(Cobham, 1969) Les seules suites à la fois $p$-automatiques et $q$-automatiques sont celles qui sont ultimement périodiques.

(Adamczewski & Bell, 2017, Schäfke & Singer, 2019) Une fonction à la fois $p$ et $q$-mahlérienne est une fraction rationnelle.

(Adamczewski, Dreyfus, Hardouin & Wimber, 2020) Si $f(z)$ est une fonction $p$-mahlérienne transcendante, $g(z)$ une fonction $q$-mahlérienne transcendante alors $f(z)$ et $g(z)$ sont algébriquement indépendantes.

**Corollaire du théorème 1.**

Soient $q_1, \ldots, q_r$ des entiers multiplicativement indépendants $2$ à $2$. Pour chaque $i$, $1 \leq i \leq r$, on considère une fonction $q_i$-mahlérienne transcendante $f_i(z)$. Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont algébriquement indépendantes.

# Démonstration du corollaire

**Théorème 1, second point.**

Soient $r \geq 2$ un entier et pour chaque $1 \leq i \leq r$, $f_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ une fonction $q_i$-mahlérienne et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ de son domaine de définition tel que $f_i(\alpha_i)$ est transcendant. Si les entiers $q_1, \ldots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants, alors les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

*Démonstration du corollaire.* Comme les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont transcendantes, il existe un point $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ sont transcendants. Par hypothèse, les nombres $q_1, \ldots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants. D'après le second point du théorème 1, les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ sont algébriquement indépendants. En particulier, les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont algébriquement indépendantes.

# Introduire de nouvelles variables

Pour étudier une $E$-fonction $f(z)$ simultanément en deux points algébriques $\alpha, \beta$, on considère les $E$-fonctions $f(\alpha z)$ et $f(\beta z)$ au point $1$.

Si $f(z)$ est une fonction mahlérienne transcendante, et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, $f(\alpha z)$ n'est *jamais* une fonction mahlérienne.

Soit $f(z) = (1-z)f(z^2)$, la série de Thue-Morse. On souhaite étudier les relations algébriques entre $f(\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{3})$. On introduit deux variables $z_1, z_2$, et on étudie le système

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_1 & 0 \\ 0 & 1-z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1^2) \\ f(z_2^2) \end{pmatrix},$$

au point $(z_1, z_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

**Inconvénient.** Il faut développer une nouvelle théorie en plusieurs variables : les théorèmes de Nishioka et de Philippon ne s'appliquent plus.

**Avantage.** Les fonctions $f(z_1)$ et $f(z_2)$ sont algébriquement indépendantes.

# Méthode de Mahler en plusieurs variables : formalisme

La transformation $z \mapsto z^q$ est remplacée par

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto T\boldsymbol{z} := \left(z_1^{t_{1,1}} \cdots z_n^{t_{1,n}}, \ldots, z_1^{t_{n,1}} \cdots z_n^{t_{n,n}}\right),$$

où $T = (t_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{N})$, inversible. Quand on étudie des fonctions $q$-mahlériennes en $n$ points distincts, on a

$$T = \begin{pmatrix} q & & \\ & \ddots & \\ & & q \end{pmatrix}, \quad \text{et } T\boldsymbol{z} = (z_1^q, \ldots, z_n^q).$$

Une fonction $T$-mahlérienne est une coordonnée d'une solution dans $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}^m$ d'un système $T$-mahlérien

$$\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = A(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} f_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \quad A(\boldsymbol{z}) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})).$$

# Conditions sur la transformation et le point algébrique

La méthode ne s'applique qu'en imposant certaines conditions à la matrice $T$ et au point $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^{\star})^n$ auquel on veut évaluer les fonctions :

- les coordonnées de la suite $(T^k\boldsymbol{\alpha})_{k\in\mathbb{N}}$ doivent converger vers $0$, de manière uniforme et à une vitesse exponentielle ;
- si $g(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$ est non nulle, alors $g(T^k\boldsymbol{\alpha})$ doit être non nul, pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible s'il vérifie ces conditions.

Dans notre situation, $T^k\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1^{q^k}, \ldots, \alpha_n^{q^k})$. La 1ère condition est automatiquement vérifiée. La seconde l'est *si et seulement si* les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants.

Cela exclut la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc les transformations du type $(z, q) \mapsto (qz, q)$.

# Un équivalent du théorème de Nishioka

## Théorème de Nishioka en plusieurs variables.

Soient $f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$ formant un vecteur solution d'un système $T$-mahlérien et $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ un point régulier pour ce système tel que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible. Alors

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, f_m(\boldsymbol{\alpha})) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}))\,.$$

Soit $f(z) = (1-z)f(z^2)$. Les nombres $f(\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{3})$ sont-ils algébriquement indépendants ? On considère le système

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_1 & 0 \\ 0 & 1-z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1^2) \\ f(z_2^2) \end{pmatrix}.$$

Le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ est régulier, on a donc

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z_1,z_2)}(f(z_1), f(z_2)) = 2\,.$$

# Application à la suite de Baum-Sweet (1)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Baum-Sweet. On veut montrer l'indépendance algébrique des nombres

$$\sum_n \frac{a_n}{2^n},\ \sum_n \frac{a_n}{3^n},\ \sum_n \frac{a_n}{5^n},\ \sum_n \frac{a_n}{7^n},\ \sum_n \frac{a_n}{11^n}.$$

On pose $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_5)$, $f(z) = \sum_n a_n z^n$. On a le système

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_1^2) \\ \vdots \\ f(z_5) \\ f(z_5^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & z_5 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1^2) \\ f(z_1^4) \\ \vdots \\ f(z_5^2) \\ f(z_5^4) \end{pmatrix}.$$

Le point $\boldsymbol{\alpha} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11})$ est régulier, et le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible.

# Application à la suite de Baum-Sweet (2)

D'après le théorème de Nishioka en plusieurs variables,

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right), f\left(\tfrac{1}{2^2}\right), \ldots, f\left(\tfrac{1}{11}\right), f\left(\tfrac{1}{11^2}\right)\right)\\ &= \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z_1,\ldots,z_5)}(f(z_1), f(z_1^2), \ldots, f(z_5), f(z_5^2))\,.\end{aligned}$$

Comme les variables sont distinctes, on a

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z_1,\ldots,z_5)}(f(z_1), f(z_1^2), \ldots, f(z_5), f(z_5^2)) = 5\times \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f(z), f(z^2))\,.$$

D'après le théorème de Nishioka (en une variable), $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$,

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\alpha\right), f\left(\alpha^2\right)\right) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f(z), f(z^2))$$

donc

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right), f\left(\tfrac{1}{2^2}\right), \ldots, f\left(\tfrac{1}{11^2}\right)\right) = \sum_{b\in\{2,3,5,7,11\}} \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\tfrac{1}{b}\right), f\left(\tfrac{1}{b^2}\right)\right)\,.$$

Donc

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right), \ldots, f\left(\tfrac{1}{11}\right)\right) = \sum_{b\in\{2,3,5,7,11\}} \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\tfrac{1}{b}\right)\right) = 5\,.$$

# 1er théorème de pureté

Soit $\mathcal{E} = (\xi_1, \dots, \xi_s) \in \mathbb{C}^s$ un $s$-uplet de nombres complexes. On note

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{E}) := \{P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_s] \ : \ P(\xi_1, \dots, \xi_s) = 0\}.$$

## 1er théorème de pureté : points indépendants

Pour $1 \leq i \leq r$ on considère $f_{i,1}(z), \dots, f_{i,s_i}(z)$ des fonctions $q$-mahlériennes, et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha_i| < 1$ de leur domaine de définition. Posons $\mathcal{E}_i = (f_{i,1}(\alpha_i), \dots, f_{i,s_i}(\alpha_i))$ et $\mathcal{E} = \amalg_i \mathcal{E}_i$. Si les points $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont globalement multiplicativement indépendants, alors

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{E}) = \sum_i \mathrm{Alg}(\mathcal{E}_i) \cdot \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}],$$

où $\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_i) \subset \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_i]$ et $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_r)$.

Appliquons le théorème pour $f_i(z) = \sum a_n z^n$, $\alpha_i = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$. On obtient l'indépendance algébrique des nombres

$$\sum_n \frac{a_n}{2^n}, \sum_n \frac{a_n}{3^n}, \sum_n \frac{a_n}{5^n}, \sum_n \frac{a_n}{7^n}, \sum_n \frac{a_n}{11^n}.$$

# Valeurs d'une fonction 2-mahlérienne et d'une fonction 3-mahlérienne

Soit $f(z)=\prod_n(1-z^{2^n})$ et $g(z)=\prod_n(1-z^{3^n})$. On a

$$f(z)=(1-z)f(z^2),\quad \text{et} \quad g(z)=(1-z)g(z^3)\,.$$

Quelle relation existe-t-il entre les nombres $f(\alpha)$ et $g(\beta)$, $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{Q}}$ ?
Et entre les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ ?

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ g(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_1 & 0 \\ 0 & 1-z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1^2) \\ g(z_2^3) \end{pmatrix}$$

C'est un système $T$-mahlérien, où $T:=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**Problème.** Pour $k\in\mathbb{N}$, $T^k(\alpha,\beta)=(\alpha^{2^k},\beta^{3^k})$. Les coordonnées ne convergent pas à la même vitesse vers $0$, *i.e.* la matrice $T$ n'est pas *admissible* pour la méthode de Mahler.

# Méthode de Mahler pour plusieurs systèmes

**Problème.** Pour $k \in \mathbb{N}$, $T^k(\alpha,\beta) = (\alpha^{2^k}, \beta^{3^k})$. Les coordonnées ne convergent pas à la même vitesse vers $0$.

On doit garder des systèmes séparés.

**Résolution du problème.** On va *itérer* ces systèmes à des ordres différents

$$\begin{aligned} f(z_1) &= a_{k_1}(z_1) f(z_1^{2^{k_1}}), \qquad & a_{k_1}(z_1) = \prod_{j=0}^{k_1-1}(1-z_1^{2^j}), \text{ et} \\ g(z_2) &= b_{k_2}(z_2) g(z_2^{3^{k_2}}), \qquad & b_{k_2}(z_2) = \prod_{j=0}^{k_2-1}(1-z_2^{3^j}), \end{aligned}$$

où $k_1 = \lfloor k/\log 2 \rfloor$, et $k_2 = \lfloor k/\log 3 \rfloor$, avec $k \in \mathbb{N}$.

On a une suite de points $\left(\alpha^{2^{\lfloor k/\log 2 \rfloor}}, \beta^{3^{\lfloor k/\log 3 \rfloor}}\right)$ dont les coordonnées convergent à la "même vitesse" vers $0$ :

$$\log\left|\alpha^{2^{\lfloor k/\log 2 \rfloor}}\right| = -\gamma e^k, \quad \text{et} \quad \log\left|\beta^{3^{\lfloor k/\log 3 \rfloor}}\right| = -\delta e^k, \quad \gamma,\delta > 0\,.$$

# Lemme de zéros

**Nouveau problème.** Si $h(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z_1, z_2\}$ est non nulle, peut-on garantir que $h\left(\alpha^{2^{\lfloor k/\log 2\rfloor}}, \beta^{3^{\lfloor k/\log 3\rfloor}}\right) \neq 0$ pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$ ?

**Réponse.** Oui, on peut le garantir (Masser, 1999). Mais peut-on *contenir* l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ pour lesquels

$$h\left(\alpha^{2^{\lfloor k/\log 2\rfloor}}, \beta^{3^{\lfloor k/\log 3\rfloor}}\right) = 0 \ ?$$

**Lemme de zéros.**

Soient $T_1, \ldots, T_r$ des matrices de rayons spectraux $\rho_1, \ldots, \rho_r$, deux à deux multiplicativement indépendants, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ des points algébriques tels que chaque paire $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible. Soit $h \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r\}$ une fonction non nulle. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ pour lesquels

$$h\left(T_1^{\lfloor k/\log(\rho_1)\rfloor}\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, T_r^{\lfloor k/\log(\rho_r)\rfloor}\boldsymbol{\alpha}_r\right) = 0$$

est *négligeable*.

# Mélanger les fonctions et les points

Reprenons $f(z) = \prod_n (1 - z^{2^n})$ et $g(z) = \prod_n (1 - z^{3^n})$, et $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$.
Que dire de nombres $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ ?

On considère les deux systèmes

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z_1 & 0 \\ 0 & 1 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1^2) \\ f(z_2^2) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} g(z_3) \\ g(z_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z_3 & 0 \\ 0 & 1 - z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(z_3^3) \\ g(z_4^3) \end{pmatrix} .$$

On doit développer la méthode de Mahler pour pouvoir traiter simultanément des systèmes associés à des transformations différentes.

Supposons qu'on ait un résultat du type "Théorème de Nishioka" :

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f(\alpha), f(\beta), g(\alpha), g(\beta)) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z_1,\ldots,z_4)}(f(z_1), f(z_2), g(z_3), g(z_4)) .$$

Les nombres $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont algébriquement indépendants.

# Second théorème de pureté

## Second théorème de pureté : transformations indépendantes

Soit $r \geq 2$. Pour $1 \leq i \leq r$, on se donne $f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_i\}$ des fonctions formant une solution d'un système $T_i$-mahlérien, $\boldsymbol{\alpha}_i$ un point régulier pour ce système, et $\mathcal{E}_i \subset \{f_{i,1}(\boldsymbol{\alpha}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)\}$.
Supposons que

- chaque paire $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible,
- les rayons spectraux de $T_1, \ldots, T_r$ sont multiplicativement indépendants 2 à 2, alors

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}(\mathcal{E}_i) \cdot \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}],$$

où $\mathcal{E} = \amalg_i \mathcal{E}_i$, $\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_i) \subset \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_i]$ et $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r)$.

# Application sur un exemple

Reprenons $f(z)=\prod_n(1-z^{2^n})$ et $g(z)=\prod_n(1-z^{3^n})$, et $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{Q}}^\star$.

D'après le second théorème de pureté, l'idéal des relations algébriques entre les nombres

$$f(\alpha),\ f(\beta),\ g(\alpha) \text{ et } g(\beta)\,,$$

est engendré par, d'une part, les relations n'impliquant que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, et, d'autre part, les relations n'impliquant que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$.

Mais d'après le premier théorème de pureté, toute relation entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ provient de relations n'impliquant que $f(\alpha)$ et de relations n'impliquant que $f(\beta)$. Comme ces nombres sont transcendants il n'y a que la relation triviale. Il n'existe donc aucune relation non triviale entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

De même, il n'existe pas de relation non triviale entre $g(\alpha)$ et $g(\beta)$.

*In fine*, il n'existe aucune relation non triviale entre $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $g(\alpha)$ et $g(\beta)$.

# Démonstration du Théorème 1 : second point

**Théorème 1, second point.**

Soient $r \geq 2$ un entier et pour chaque $1 \leq i \leq r$, une fonction $q_i$-mahlérienne $f_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$, et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ de son domaine de définition tel que $f_i(\alpha_i)$ est transcendant. Si les entiers $q_1, \ldots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants, alors les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

*Démonstration.* On met chaque fonction dans un système $q_i$-mahlérien pour lequel le point $\alpha_i$ est régulier.

On peut appliquer le second théorème de pureté, avec $T_i = (q_i)$. L'idéal des relations entre les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ est engendré par des relations n'impliquant que l'un des nombres $f_i(\alpha_i)$. Comme ces nombres sont transcendants, il n'existe pas de telle relation non triviale. Il n'existe donc aucune relation non triviale entre les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$.

# Démonstration du Théorème 1 : premier point

**Théorème 1, premier point.**

Soient $r \geq 2$ un entier et pour chaque $1 \leq i \leq r$, une fonction $q_i$-mahlérienne $f_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$, et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ de son domaine de définition tel que $f_i(\alpha_i)$ est transcendant. Si les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants, alors les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

*Démonstration.* On met chaque fonction dans un système $q_i$-mahlérien pour lequel le point $\alpha_i$ est régulier. On peut supposer que pour chaque $i, j$, soit $q_i = q_j$, soit $q_i$ et $q_j$ sont multiplicativement indépendants.

On donne une variable différente à chaque système, et on regroupe tous les systèmes mahlériens associés à un même entier $q$ dans un seul grand système $T_q$-mahlérien, avec $T := q\mathrm{Id}$.

# Démonstration du Théorème 1 : premier point (suite)

**Théorème 1, premier point.**

Soient $r \geq 2$ un entier et pour chaque $1 \leq i \leq r$, une fonction $q_i$-mahlérienne $f_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$, et un point $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ de son domaine de définition tel que $f_i(\alpha_i)$ est transcendant. Si les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants, alors les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

*Démonstration (suite).* D'après le second théorème de pureté, l'idéal des relations entre les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ est engendré par des relations n'impliquant que les nombres provenant d'un même système (*i.e.* les fonctions associées à un même $q$).

Comme les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants, et comme chacun des nombres $f_i(\alpha_i)$ est transcendant, d'après le premier théorème de pureté, il n'y a pas de telle relation non triviale.

Les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ sont donc algébriquement indépendants.