Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES

Université Paris 6

Lucia Di Vizio[1]

22 septembre 2008

Jury: MM Y. André, F. Baldassarri, D. Bertrand, F. Loeser, Y. Manin, J.-P. Ramis

Rapporteurs: MM K. Kedlaya, Y. Manin, J.-P. Ramis

[1]Institut de Mathématiques de Jussieu, Topologie et géométrie algébriques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. e-mail: divizio@math.jussieu.fr

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier K. Kedlaya, Y. Manin et J.-P. Ramis qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, ainsi que les membres du jury de soutenance Y. André, F. Baldassarri, D. Bertrand, F. Loeser, Y. Manin, J.-P. Ramis, pour l'honneur qu'ils me font.

Depuis que je suis au CNRS j'ai travaillé dans trois laboratoires distincts. Je voudrais remercier les personnes qui m'ont accueillie et qui ont facilité mon intégration dans ces différents labos : J.-P. Ramis et F. Bethelot qui était directeur du laboratoire E. Picard à l'époque de mon arrivée ; F. Loeser et M. Rosso au DMA ; V. Maillot qui en premier m'a proposé de rejoindre l'équipe de Topologie et Géométrie Algébrique de l'IMJ, G. Godefroy, C. Voisin et D. Bertrand qui, à plusieurs reprises, ont soutenu ma demande et Ch. Peskine pour avoir pris une decision à contre-courant (j'espère qu'il ne le regrette pas trop !). Je voudrais aussi remercier ceux qui m'ont aidée dans le nettoyage orthographique de ce mémoire, Zindine Djadli, David Harari et Jean-Paul Allouche : les fautes qui restent sont le signe de la loudeur de la tâche qu'ils ont accepte d'accomplir ! Zindine Djadli, David Harari, et Mathieu Florence ont accepté d'assister a la répétition générale de la soutenance : je leur en suis très reconnaissante. Enfin, je remercie tous les amis et collègues qui ont rendu le travail agréable et les pauses café amusantes : la liste serait bien trop longue !

Un remerciement particulier va à Yves André pour ces 10 années de soutien ; à Daniel Bertrand qui a suivi les étapes qui ont mené à cette soutenance avec beaucoup de patience ; aux personnes avec qui j'ai collaboré, Y. André, F. Baldassarri, J. Sauloy, J.-P. Ramis, Ch. Zhang ; aux participants du groupe de travail “Equations aux q-différences” de Toulouse et du groupe de travail “différentiel” à l'IMJ.

Je dois dire, non sans emotion, que la liste des personnes que je voudrais remercier ici est bien trop longue pour tenir en quelques lignes. Au risque que ces remerciements prennent une tournure rhétorique, je tiens quand-même à exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont soutenue et donné un coup de pouce lorsque j'en ai eu besoin, parfois à ma plus grande surprise. Enfin, je voudrais remercier ma famille, mes parents et Zindine qui tiennent toujours bon !

Préface

Ce texte est une synthèse des travaux suivants, présentés en vue de l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger des recherches[1] :

[4] Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Inventiones Mathematicae*, 150(3), 517–578, 2002. arXiv : math.NT/0104178

[6] Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. II*, pages 615–675. arXiv : math.NT/0211217.

[7] (avec Yves André) q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, (296), 55–111, 2004.

[8] An ultrametric version of the Maillet-Malgrange theorem for non linear q-difference equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (2008), 2803-2814. arXiv : 0709.2464.

[9] (avec Changgui Zhang) On q-summation and confluence. À paraître dans *Annales de l'Institut Fourier.* arXiv : 0709.1610.

[10] (avec Francesco Baldassarri) Continuity of the radius of convergence of p-adic differential equations on Berkovich analytic spaces. arXiv : 0709.2008.

[11] (avec Francesco Baldassarri) Sur la continuité du rayon de convergence générique sur une polycouronne. Note non publiée, 8 pages, 2008.

[12] Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. À paraître dans *Journal of Noncommutative Geometry.* arXiv : 0802.4223.

Ces travaux ont tous été développés après ma thèse de doctorat, à l'exception de [4], qui était partiellement contenu dans cette dernière. Les papiers [9], [10] et [12], non publiés, sont consultables sur arxiv.org. La note [11] donne une preuve directe d'un corollaire des résultats contenus dans [10] : j'ai choisi de l'inclure dans le projet d'habilitation car elle permet de dégager des propriétés spectrales importantes des équations différentielles p-adiques, qui feront l'objet d'études ultérieures.

La synthèse de ces travaux est suivie de la liste complète de mes publications et prépublications. La totalité des textes présentés est reproduite dans l'annexe ci-jointe : il est important de préciser qu'il peut y avoir des différences mineures entre les textes publiés et ceux reproduits dans l'annexe.

[1] Le numéros dans la liste suivante se réfèrent à la liste complète de mes travaux qui se trouve dans la bibliographie à la fin de ce texte : mes propres publications y paraissent numérotées et séparées des autres références cités. On pourra retrouver ces textes à la page `http ://www.math.jussieu.fr/~divizio/preprints.html`, constamment mise à jour.

Résumé (en français et en anglais)

Résumé

Le mémoire qui suit est divisé en quatre parties :

I) La première partie traite d'équations différentielles p-adiques. Nous établissons un résultat de semi-continuité du rayon de convergence des solutions locales d'un système différentiel sur un espace analytique de Berkovich. En dimension 1, nous obtenons un résultat plus fort de continuité, tout court (*cf.* [10], [11]).

II) Dans la deuxième partie nous exposons les résultats relatifs au q-analogue de la conjecture de Grothendieck-Katz et la "liste de Schwarz" pour les séries hypergéométriques de Heine (*cf.* [4]).

III) La troisième partie concerne l'étude p-adique des équations aux q-différences : nous établissons un théorème de monodromie locale et un résultats sur l'existence de q-déformations isomonodromiques (*cf.* [6], [7]). Nous survolons des résultats sur la nature q-Gevrey des solutions formelles des équations aux q-différences analytiques p-adiques non linéaires (*cf.* [8]).

IV) La dernière partie traite des équations aux q-différences dans le champ complexe. Nous nous occupons d'abord du cas $|q| \neq 1$ et des problèmes de resommation qui le caractérisent (*cf.* [9]) et puis de la classification analytique locale des équations aux q-différences, dans le cas $|q| = 1$ (*cf.* [12]). Ceci se rapproche des résultats de [8], où nous démontrons que toute solution formelle d'une équation aux q-différences analytique, éventuellement non linéaire, satisfaisant à des conditions diophantiennes convenables, est convergente.

Abstract

The following memoir is divided into four parts :

I) The first part deals with p-adic differential equations. We establish a result on the semicontinuity of the radius of convergence of a local solution of a differential system on an analytic Berkovich space. In dimension 1, we obtain a stronger result of continuity (*cf.* [10], [11]).

II) In the second part we expose the results relative to the q-analog of the Grothendieck-Katz conjecture and the Schwarz list for Heine hypergeometric series (*cf.* [4]).

III) The third part regards p-adic q-différence equations. We establish a theorem of local monodromy and a result on the existence of isomonodromic q-deformations (*cf.* [6], [7]). We also survey a result on the q-Gevrey nature of formal solutions of p-adic analytic non-linear q-différence equations (*cf.* [8]).

IV) In the last part we deal with the complex theory of q-différence equations. We start with the case $|q| \neq 1$ and the related summation problems that characteized it (*cf.* [9]). Then we expose the local analytic classification of q-différence equations with $|q| = 1$ (*cf.* [12]). This is related to [8], where we show that every formal solution of a non linear analytic q-différence equation with $|q| = 1$, satisfying some diophantine conditions, is convergent.

Table des matières

Équations différentielles p-adiques et équations aux q-différences

Introduction

Le texte qui suit est un survol de mes travaux depuis ma thèse de doctorat, et notamment des articles et des manuscrits suivants :

[4] Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Inventiones Mathematicae*, 150(3), 517–578, 2002. arXiv : math.NT/0104178

[6] Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. II*, pages 615–675. arXiv : math.NT/0211217.

[7] (avec Yves André) q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, (296), 55–111, 2004.

[8] An ultrametric version of the Maillet-Malgrange theorem for non linear q-difference equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (2008), 2803-2814. arXiv : 0709.2464.

[9] (avec Changgui Zhang) On q-summation and confluence. À paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*. arXiv : 0709.1610.

[10] (avec Francesco Baldassarri) Continuity of the radius of convergence of p-adic differential equations on Berkovich analytic spaces. arXiv : 0709.2008.

[11] (avec Francesco Baldassarri) Sur la continuité du rayon de convergence générique sur une polycouronne. Note non publiée, 8 pages, 2008.

[12] Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. À paraître dans *Journal of Noncommutative Geometry*. arXiv : 0802.4223.

Je viens de les énumérer selon leur ordre de publication, mais on pourrait les regrouper selon différents critères : en effet, [4], [6], [7], [8], [9], [12] portent sur les équations aux q-différences, alors que [11] et [10] affrontent des problématiques liées aux équations différentielles ; d'un autre point de vue, [6], [7], [8], [11] et [10] traitent d'analyse p-adique, alors que dans [9] et [12] nous travaillons dans le champ complexe. En ce qui concerne [4], les résultats contenus dans ce papier utilisent à la fois des techniques p-adiques et des résultats de la théorie complexe : en effet, on se place sur un corps de nombres et on développe plutôt un approche adélique.

Nous avons déjà ici trois canevas possibles pour la structure de ce mémoire, mais j'en choisirai un quatrième. Il me semble que la façon la plus naturelle de raconter mes résultats est de commencer par les papiers [10] et [11], qui ont été démarrés en premier, et de suivre dans l'ordre chronologique de leur conception.

* * *

Je commencerai donc ce mémoire en présentant le manuscrit [10], en collaboration avec F. Baldassarri, qui traite des invariants spectraux des connexions sur les espaces analytiques p-adiques de Berkovich. Le point de départ et la motivation de ce texte ont été la note non publiée [11], qui donne une preuve directe d'un corollaire de [10].

Les espaces analytiques de Berkovich se proposent comme un cadre de travail idéal pour les équations différentielles p-adiques : des notions fondamentales de la théorie classique, comme les points génériques, deviennent complètement compréhensibles à travers leur interprétation géométrique. Dans ce papier, nous partons d'un résultat de Christol et Dwork [CD94] de continuité du rayon de convergence générique, pour analyser le problème plus général de la continuité du rayon de convergence d'une base de solutions locales d'une équation différentielle sur un espace analytique de Berkovich, en dimension 1. Cette analyse fait émerger des invariants spectraux des connexions en dimension supérieure, pour lesquels nous ne pouvons prouver que des résultats de semicontinuité.

La partie II est un bref survol du papier [4].

La partie III est consacrée à la théorie p-adique des équations aux q-différences, lorsque $|q| = 1$, et à leur confluence vers les équations différentielles, donc aux papiers [6], [7] et [8].

Disons, pour fixer les idées que q est un nombre dans $\mathbb{C}_p$, et qu'il n'est pas une racine de l'unité. On appelle algèbre aux q-différences une algèbre R de fonctions, équipée d'une action du groupe $q^{\mathbb{Z}}$:

$$\sigma_q : f(x) \longmapsto f(qx)\,.$$

Les algèbres $\mathbb{C}_p(x)$, $\mathbb{C}_p[[x]]$, $\mathbb{C}_p((x))$, ou bien les germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) en zéro à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, sont les tout premiers exemples naturels. On peut donc étudier les équations fonctionnelles linéaires associées, *i.e.* les équations aux q-différences à coefficients dans R :

$$a_\mu(x)y(q^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q^{\mu-1}x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0\,,$$

où $a_\mu(x), a_{\mu-1}(x), \ldots, a_0(x) \in R$ et $a_\mu(x)a_0(x) \neq 0$.

Au delà de leur intérêt intrinsèque, les équations aux q-différences sont une *discrétisation* des équations différentielles au le sens de la limite suivante :

$$\lim_{q\to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \frac{df}{dx}\,.$$

Il est donc naturel de se demander comment dégénère une famille d'équations aux q-différences lorsque $q \to 1$: on appelle ce phénomène confluence.

Le premier de ces travaux [6] est une introduction aux instruments de base, ensuite utilisés dans [7], où, en collaboration avec Y. André, nous établissons un théorème de monodromie des équations aux q-différences p-adiques avec structure de Frobenius forte, q-analogue de la conjecture de Crew, démontrée par Y. André [And02], Z. Mebkhout [Meb02] et K. Kedlaya [Ked04]. Nous démontrons ensuite l'existence d'un foncteur de déformation isomonodromique entre les équations différentielles p-adiques et les équations aux q-différences avec structure de Frobenius forte, qui s'avère être une équivalence de catégories.

Le papier [8] peut être vu comme la transition entre la partie III et la partie IV. Il traite de la nature divergente, et plus précisément q-Gevrey, des solutions des équations aux q-différences analytiques non linéaires sur un corps ultramétrique, lorsque $|q| \neq 1$, en s'inspirant d'un travail de B. Malgrange [Mal89]. Il faut garder en tête l'application au cas où q est un paramètre et la norme ultramétrique est associée soit au degré en q, soit à l'ordre de pôle en q. On conclut par une digression sur le cas complexe non linéaire, lorsque $|q| = 1$: on y démontre que toute série formelle, solution d'une équation aux q-différences analytique complexe, avec $|q| = 1$, est convergente, si certaines conditions diophantiennes sont vérifiées : ceci nous rapproche des résultats de [12] (*cf.* §10 plus loin).

Enfin, la partie IV est dédiée à la théorie complexe des équations aux q-différences. Nous établissons (*cf.* [9]) un théorème de confluence et un théorème de comparaison des différentes théories de q-resommation, dans les cas $|q| \neq 1$.

Le mémoire se conclut par le paragraphe §9, qui décrit la classification analytique locale des modules aux q-différences pour $|q| = 1$.

* * *

Avant de clore cette introduction et passer à la section plus technique de ce texte, faisons encore quelques commentaires.

La théorie complexe des équations aux q-différences est très développée dans le cas "$|q| \neq 1$", et très pauvre dans le cas "$|q| = 1$" : ceci est essentiellement dû au fait que, dans cette dernière situation, la fonction Thêta de Jacobi

$$\Theta_q(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n$$

ne converge pas et qu'une formulation assez générale du problème des petits diviseurs se présente. Une autre difficulté à ne pas sous-estimer, déjà surmontée dans le cas p-adique, est celle d'écrire des solutions analytiques en des points ordinaires autres que 0 et ∞. Je m'étendrai sur ces questions et leurs implications dans la partie IV.

Pour les équations aux q-différences p-adiques nous constatons que la situation est inversée : ceci peut paraître paradoxal, mais l'explication est en effet très naturelle. Pour fixer les idée supposons $|q| > 1$: que nous soyons dans le cas archimédien ou ultramétrique $\Theta_q(x)$ est méromorphe sur $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$. Nous disposons donc dans les deux cas d'une bonne théorie des fonctions elliptiques, *i.e.* telles que $f(qx) = f(x)$: il n'y a pas vraiment de différence substantielle entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_p$ à ce propos. Donc, les théories complexe et p-adique ne diffèrent guère et une simple remarque souvent suffit pour convaincre le lecteur que tout ce que l'on vient d'énoncer sur $\mathbb{C}$ vaut sur $\mathbb{C}_p$.

Supposons maintenant $|q| = 1$. Les "pathologies" des équations aux q-différences sont alors très proches des "pathologies" des équations différentielles p-adiques : donc, d'un côté, il est plus facile de traiter le cas p-adique pour $|q| = 1$ en s'inspirant du cas différentiel, et, de l'autre côté, il y a l'espoir que la théorie p-adique aide à comprendre la théorie complexe pour $|q| = 1$.

Enfin, dans tout ce texte nous allons supposer que q n'est pas une racine de l'unité. Dans [SV03], les auteurs prouvent que, si q est une racine de l'unité, la catégorie des modules aux q-différences est équivalente à la catégorie des espaces vectoriels munis d'un automorphisme. Des structures aux q-différences plus sophistiquées, pour q racine de l'unité, sont étudiées dans [Pul06] et dans [Har07].

I Sur les équations différentielles p-adiques

1 Équations différentielles analytiques sur les espaces de Berkovich en dimension 1

Le but principal du texte [10] est de fournir un cadre de travail géométrique pour les équations différentielles p-adiques, à plusieurs variables. En effet les espaces de Berkovich semblent être un cadre de travail idéal, dans lequel les techniques classiques de Dwork, Robba,... trouvent une interprétation géométrique naturelle.

1.1. Le résultat de Christol-Dwork [CD94]

Partons d'un exemple en dimension 1, dans un cadre très classique. Soit K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle et avec corps résiduel k de caractéristique $p > 0$.

On se donne une extension Ω/K de corps valués telle que : Ω est complet, algébriquement clos, $|\Omega| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ et le corps résiduel de Ω est transcendant sur k.

Considérons la couronne ouverte $\mathcal{C} = \{x \in \Omega : r_1 < |x| < r_2\}$, avec $0 < r_1 < r_2$. L'algèbre $\mathcal{H}$ des éléments analytiques sur $\mathcal{C}$ est le complété de la sous-algèbre de $K(x)$ des fonctions rationnelles bornées sur $\mathcal{C}$, par rapport à la norme du sup :

$$|f|_{\mathcal{C}} = \sup_{x\in\mathcal{C}} |f(x)| \, .$$

Les *points génériques* (sur K) à distance $r \in \mathbb{R}_{>0}$ de 0 sont des points $t_r \in \Omega$ tels que pour tout $f = \sum f_n x^n \in K[x]$ on a : $|f(t_r)| = \sup_n |f_n| r^n$. Les éléments de $\mathcal{H}$ peuvent tous être évalués aux points t_r, pour tout $r \in [r_1, r_2]$.

Considérons maintenant un système différentiel

$$\frac{dY}{dx} = G(x) Y \, ,$$

avec $G(x)$ matrice carrée à coefficients dans le corps $\mathcal{E}$ des fractions de $\mathcal{H}$. Les points t_r sont tous des points ordinaires pour ce système, qui y admet donc une base de solutions analytiques. Elle est construite de la façon suivante. On itère le système différentiel : $\frac{1}{n!}\frac{d^nY}{dx^n} = G_n(x)Y$, pour tout $n \geq 1$, où $G_n(x)$ est une matrice carrée convenable à coefficients dans $\mathcal{E}$. Pour $n = 0$, on pose G_0 égal à la matrice identité. Alors une solution analytique au point t_r est donnée par

$$Y(x) = \sum_{n\geq 0} G_n(t_r)(x - t_r)^n \in GL(\Omega[[x - t_r]]) \, .$$

Le *rayon de convergence générique (en un point à distance r de 0)* est le nombre :

$$R(G, t_r) = \inf \left(r, \liminf_{n\to\infty} |G_n(t_r)|^{-1/n} \right) \, ,$$

que nous savons, par ailleurs, être non nul. Christol et Dwork prouvent :

Théorème 1.1 ([CD94, Thm. 2.5]). *La fonction $r \mapsto R(G, t_r)$ est continue sur l'intervalle fermé $[r_1, r_2]$.*

La continuité sur l'intervalle ouvert est une simple conséquence de la convexité des fonctions $r \mapsto |G_n(t_r)|$. La continuité au bord est plus laborieuse et s'obtient en utilisant le théorème de Dwork-Robba qui donne une estimation effective de la croissance des $|G_n(t_r)|$ pour tout $r \in [r_1, r_2]$.

Nous savons de plus que :

Théorème 1.2 ([Pon00, Thm. 2.2]). *La fonction*

$$\begin{array}{ccc} [\log r_1, \log r_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varrho & \longmapsto & \log R(G, t_{e^\varrho}) \end{array}$$

est concave et affine par morceaux.

Ce résultat est fondamental dans la théorie de Christol-Mebkhout (*cf.* [CM93], [CM97], [CM00], [CM01]), car c'est ce polygone (ou plus précisément sa pente au bord de l'intervalle considéré) qui permet de construire une filtration des modules différentiels p-adiques sur l'anneau de Robba, qui naturellement est un outil indispensable à leur étude.

1.2. Généralisation aux espace analytiques de Berkovich

Supposons par simplicité que K soit aussi maximalement complet. Alors les points de l'espace analytique de Berkovich $X = D(0, 1^+)$ correspondent aux seminormes multiplicatives définies sur l'algèbre des fonctions analytiques sur X à coefficients dans K, continues par rapport à la sup-norme sur X. Ils sont de deux types : soit des points fermés ou bien des points génériques. Si on considère un système différentiel à coefficients analytiques sur un affinoïde

$$U = X \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{k} D(a_i, r_i^-) \subset X\,,$$

on peut définir un rayon de convergence en chaque point $\xi \in U$, comme plus haut, juste en remplaçant la fonction constante r par le rayon du plus grand disque centré en ξ et contenu dans U. Cette dernière notion est délicate (pas tellement dans le cas de U, mais dans des cas moins élémentaires) : en effet, pour la topologie de Berkovich, $\xi \in U$ n'a pas toujours un système de voisinages composé de disques. Même la notion de disque, liée à des coordonnées locales centrées en ξ n'a pas toujours de signification : pour cela il faut d'abord faire une extension des scalaires à un corps qui est une sorte de corps de définition du point. Le théorème de Christol-Dwork se généralise donc à l'énoncé suivant :

Théorème 1.3 ([10, Thm. 5.2])**.** *Le fonction $\xi \mapsto R(G, \xi)$ est continue sur U pour la topologie de Berkovich.*

Dans le cas d'une couronne, le segment considéré au paragraphe précédent est contenu homéomorphiquement dans X, mais la structure topologique est bien plus compliquée : dans ce cas X est un arbre réel, dont chaque branche est homéomorphe au segment du §1.1, mais tel que de chaque point générique sortent une infinité de segments.

2 Invariants spectraux en dimension supérieure

Dans les notations de §1.1, considérons maintenant une polycouronne

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n : r_1^i < |x_i| < r_2^i\,,\ i = 1, \dots, n\}\,,$$

où $0 < r_1^i < r_2^i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. On peut considérer des points génériques $t_{\underline{\varrho}} = (t_{\varrho_1}, \dots, t_{\varrho_n}) \in \Omega^n$ et évaluer les éléments analytiques sur $\mathcal{C}$, que nous notons encore $\mathcal{H}$, en tout point $t_{\underline{\varrho}}$, tel que $r_1^i \leq \varrho_i \leq r_2^i$. D'un autre coté, on peut considérer un système différentiel intégrable à plusieurs variables

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = G_i(x) Y\,,\ i = 1, \dots, n\,, \tag{2.1}$$

avec $G_i(x)$ matrice carrée à coefficients dans $\mathcal{E} = \mathrm{F}rac(\mathcal{H})$. Ce système aussi peut être itéré grâce à la formule de Leibniz :

$$\frac{1}{\underline{\alpha}!}\frac{\partial^{\underline{\alpha}} Y}{\partial \underline{x}^{\underline{\alpha}}} := \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i!}\frac{\partial^{\alpha_i} Y}{\partial x_i^{\alpha_i}} = G_{\underline{\alpha}}(x) Y\,,\ \text{pour tout } \alpha = (\alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \tag{2.2}$$

où $G_{\underline{\alpha}}(x)$ une matrice carrée convenable à coefficients dans $\mathcal{E}$. Pour tout point générique $t_{\underline{\varrho}} \in \mathcal{C}$ on peut définir la solution de (2.1) au voisinage de $t_{\underline{\varrho}}$:

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} G_{\underline{\alpha}}(t_{\underline{\varrho}})(x_1 - t_{\varrho_1})^{\alpha_1} \cdots (x_n - t_{\varrho_n})^{\alpha_n} \in GL(\Omega[[x_1 - t_{\varrho_1}, \dots, x_n - t_{\varrho_n}]])\,.$$

On appelle encore une fois *rayon de convergence générique (au point $t_{\underline{\varrho}}$)* : le nombre :

$$R(G,t_{\underline{\varrho}}) = \inf\left(\inf_{i=1,\dots,n}\varrho_i, \liminf_{|\underline{\alpha}|\to\infty}|G_{\underline{\alpha}}(t_{\underline{\varrho}})|^{-1/|\underline{\alpha}|}\right),$$

où $|\underline{\alpha}| = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i$.

Théorème 2.1. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} R(G,t_*) : & \prod_{i=1}^{n}[r_1^i, r_2^i] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ & \underline{\varrho}=(\varrho_1,\dots,\varrho_n) & \longmapsto & R(G,t_{\underline{\varrho}}) \end{array}$$

est continue.

La définition de rayon donnée dans le cas d'une polycouronne peut être généralisée à des espaces analytiques de Berkovich en dimension supérieure : nous obtenons ainsi une fonction à valeurs réelles dont nous ne prouvons que la semicontinuité supérieure (*cf.* [10, §4]). Nous prouvons la continuité tout court en dimension 1. Le Théorème 2.1 peut être démontré facilement comme corollaire de [10] (*cf.* [11, §4]), car la continuité inférieure s'obtient via un raisonnement de concavité. Dans [11, §6], nous en donnons aussi une preuve directe qui met en évidence la nature spectrale de la fonction $R(G,t_*)$.

La nature distincte des deux preuves données au Théorème 2.1 se reflète à un niveau supérieur. Dans la généralisation de cet exemple à des cas plus sophistiqués nous nous trouvons en effet face à une dichotomie. D'un côté, $\boldsymbol{\rho} = \inf_{i=1,\dots,n}\varrho_i$ est le rayon de la plus grande boule contenue dans $\mathcal{C}$ et centrée en $t_{\underline{\varrho}}$. De l'autre, $\boldsymbol{\rho}$ est le minimum de la norme spectrale des opérateurs K-linéaires $\frac{\partial}{\partial x_i}$, agissant sur le corps $\mathcal{E}$, équipé de la norme $|\cdot(t_{\underline{\varrho}})|$ d'évaluation en $t_{\underline{\varrho}}$. Si nous généralisons la définition de $R(G,t_{\underline{\varrho}})$ en mettant en avant la première caractérisation de $\boldsymbol{\rho}$ nous obtenons un invariant qui a des propriétés analytiques, autrement nous obtenons un invariant spectral, qui est défini seulement pour certains points, qu'on pourrait définir génériques, des espaces de Berkovich : plus précisément, ceux pour lesquels les dérivations sont continues par rapport à la norme d'évaluation en le point. C'est le premier point de vue qui est développé dans [10]. Le deuxième point de vue est l'objet des travaux en cours. Signalons d'ailleurs le travail en cours de Kedlaya et Xiao sur ce sujet [KX].

II Équations aux q-différences sur un corps de nombres

Ici, nous allons aborder le problème *schwarzien* de la recherche des solutions algébriques d'équations fonctionnelles linéaires. Dans le contexte des équations aux q-différences on obtient plutôt des résultats de rationalité : ceci est dû au fait que les germes méromorphes en zéro de solutions d'une équation aux q-différences, avec $|q|\neq 1$, sont forcément germes de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier.

3 Rationalité des solutions de l'équation hypergéométrique basique de Heine

Commençons par les équations hypergéométriques basiques. Soient Soit $q\in\mathbb{C}^*$ un nombre complexe, non racine de l'unité, et $a,b,c\in\mathbb{C}^*$, avec $c\notin q^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. La série hypergéométrique *basique* :

$$ {}_2\Phi_1(a,b,c;q,x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(a;q^{-1})_n(b;q^{-1})_n}{(c;q^{-1})_n(q^{-1};q^{-1})_n}x^n \tag{3.1}$$

avec $(a;q^{-1})_0 = 1$ et $(a;q^{-1})_n = (1-q^{-n+1}a)(a;q^{-1})_{n-1}$ pour $n \geq 1$, est solution de l'équation aux q-différences linéaire rationnelle d'ordre 2 :

$$y(q^2x) - \frac{(a+b)x-(1+c/q)}{abx-c/q}y(qx) + \frac{x-1}{abx-c/q}y(x) = 0\,. \tag{3.2}$$

La série ${}_2\Phi_1$ a été définie par Heine, puis étudiée par Ramanujan. C'est un q-analogue (et une déformation) de la série hypergéométrique *classique* d'Euler-Gauss :

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}x^n\,, \tag{3.3}$$

avec $(\alpha)_0 = 1$ et $(\alpha)_n = (\alpha+n-1)(\alpha)_{n-1}$. On retrouve cette dernière lorsqu'on fait tendre q vers 1, avec les contraintes $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$, $c=q^\gamma$. On peut aussi faire confluer l'équation fonctionnelle (3.2) vers l'équation hypergéométrique classique, lorsque $q\to 1$:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 y - \frac{(\alpha+\beta)x+(1-\gamma)}{1-x}x\frac{d}{dx}y + \frac{\alpha\beta x}{1-x}y = 0\,. \tag{3.4}$$

On démontre :

Théorème 3.1 ([4, App.]). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation hypergéométrique basique (3.2), de paramètres a,b,c, admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*
2. *Il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ tels que $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$ et $c=q^\gamma$ et l'équation hypergéométrique classique (3.4), de paramètres α,β,γ, admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*
3. *Il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ tels que $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$ et $c=q^\gamma$ et $|1-\gamma|$, $|\gamma-\alpha-\beta|$ et $|\alpha-\beta|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.*

Remarque 3.2. En effet, l'équation hypergéométrique classique (3.4) admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$ si et seulement si l'assertion 3 est vérifiée (*cf.* [Gou36, Ch. III]).

Corollaire 3.3 ([4, App.]). *L'équation aux q-différences* (3.2) *a une base de solutions algébriques sur $\mathbb{C}(x)$ si et seulement si une des propositions suivantes est satisfaite :*
- *l'équation* (3.2) *a une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*
- *$a,b,c\in q^{\mathbb{Q}}$, $c, ab^{-1}\notin q^{\mathbb{Z}}$ et soit $a, bc^{-1}\in q^{\mathbb{Z}}$ ou $b, ac^{-1}\in q^{\mathbb{Z}}$.*

Remarque 3.4. Les deux énoncés plus haut, et les détails de leur preuve, permettent de déterminer la liste de cas dans lesquels le groupe de Galois aux q-différences de l'équation (3.2) est banal ou fini. Depuis, J. Roques a calculé les groupe de Galois aux q-différences des équations hypergéométriques, en fonction des paramètres, en toute généralité (*cf.* [Roq07]).

4 Le q-analogue de la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures

Dans cette section, q est un nombre algébrique non nul, non racine de l'unité : à notre connaissance, ce choix de q est déterminant pour tous les résultats qui se situent autour des problèmes d'algébricité et rationalité liés aux équations aux q-différences. En effet, cela implique qu'il existe une norme (archimédienne ou ultramétrique) telle que $|q|\neq 1$ et permet d'utiliser les fortes propriétés que les équations aux q-différences ont dans ce cas.

Dans [Béz91] Bézivin énonce une conjecture pour les équations aux q-différences, dans le sillage de la célèbre conjecture de Grothendieck sur l'algébricité des solutions des équations différentielles :

Conjecture 4.1. (Grothendieck) *L'équation différentielle*

$$a_\mu(x)\frac{d^\mu y}{dx^\mu}(x) + a_{\mu-1}(x)\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0,$$

avec $a_i(x) \in \mathbb{Q}(x)$, admet un système complet de solutions algébriques, i.e. *dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(x)$, si et seulement si sa réduction modulo p admet un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p(x)$, pour presque tout p.*

La conjecture peut être reformulée de plusieurs façons, en apparence plus générales que l'énoncé 4.1. En particulier elle est équivalente à une caractérisation arithmétique de l'algèbre de Lie du groupe de Galois générique, conjecturée par N. Katz [Kat82]. De nombreux travaux sont consacrés à la conjecture de Grothendieck (*cf.* par exemple les travaux de T. Honda [Hon81], D.V. et G.V. Chudnovsky [CC85b], N. Katz [Kat82], Y. André [And03], J.-B. Bost [Bos01]), mais elle n'a été prouvée que dans des cas particuliers.

Le théorème qui suit peut être considéré comme un q-analogue de la conjecture de Grothendieck. Considérons un nombre rationnel[2] $q \neq 0, 1, -1$ et une équation aux q-différences

$$\mathcal{L}y = a_\mu(x)y(q^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q^{\mu-1}x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \ a_0(x)a_\mu(x) \neq 0,$$

à coefficients $a_i(x)$ dans $\mathbb{Q}(x)$. Pour presque tout nombre premier p, la réduction $\overline{q}$ de q modulo p est différente de zéro et engendre un sous-groupe cyclique de $\mathbb{F}_p$ d'ordre κ_p. Pour presque tout p, il existe donc un entier positif ℓ_p et deux entiers g, h tels que $1 - q^{\kappa_p} = p^{\ell_p}\frac{g}{h}$ et $p \not| gh$, et on peut considérer la réduction $\mathcal{L}_p y = 0$ de $\mathcal{L}y = 0$ modulo p^{ℓ_p}. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{P(q^i x)}, i \geq 1\right]$, avec $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Q}(x)$, telle que $a_i(x) \in \mathcal{A}$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu$.

Théorème 4.2 ([4, §III]). *L'équation aux q-différences $\mathcal{L}y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}(x)$ si et seulement si, pour presque tout nombre premier p, l'équation $\mathcal{L}_p y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Le théorème 4.2 répond partiellement à la conjecture de Bézivin, qui prédit le même type de résultat en considérant la réduction modulo p à la place de la réduction modulo p^{ℓ_p}.

Nous pouvons aussi considérer un module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Sigma_q)$ sur $\mathbb{Q}(x)$: il s'agit d'un espace vectoriel M de dimension finie sur $\mathbb{Q}(x)$ équipé d'une application σ_q-semilinéaire bijective Σ_q, *i.e.* d'un morphisme bijectif $\mathbb{Q}$-linéaire tel que $\Sigma_q(fm) = \sigma_q(f)\Sigma_q(m)$, pour tout $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $m \in M$. Pour un choix convenable du polynôme $P(x)$, il existe un réseau $\widetilde{M}$ de M défini sur l'algèbre $\mathcal{A}$, stable par Σ_q. Le théorème 4.2 est équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème 4.3 ([4, §III]). *Le module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Sigma_q)$ est banal*[3] *si et seulement si pour presque tout nombre premier p l'opérateur $\Sigma_q^{\kappa_p}$ induit l'identité sur $\widetilde{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Comme dans la théorie différentielle, nous pouvons attacher au module aux q-différences $\mathcal{M}$ un sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ de $GL(M)$, qu'on appelle groupe de Galois (générique). Il s'agit du stabilisateur dans $GL(M)$ des modules aux q-différences qui sont sous-quotients de sommes finies de la forme $\oplus_{i,j}(M^{\otimes^i} \otimes_{\mathbb{Q}(x)} (M^*)^{\otimes^j})$, où M^* est le dual de M, muni de l'opérateur induit par Σ_q. Le choix du réseau $\widetilde{M}$ permet définir la réduction modulo p^{ℓ_p} de $Gal(\mathcal{M})$ et de donner encore un autre énoncé équivalent à 4.2 :

[2] Pour simplifier les notations (mais cela ne simplifie pas les démonstrations !) nous ne considérerons ici que des équations aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. En fait, les énoncés qui suivent sont prouvés dans [4] pour des équations aux q-différences définies sur les fonctions rationnelles à coefficients algébriques.

[3] *i.e.* il existe une base $\underline{e}$ de M sur $\mathbb{Q}(x)$ telle que $\Sigma_q \underline{e} = \underline{e}$.

Théorème 4.4 ([4, §IV]). *Le groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(M)$, dont la réduction modulo p^{ℓ_p} contient la réduction de $\Sigma_q^{\kappa_p}$ modulo p^{ℓ_p} pour presque tout p.*

La nature multiplicative de l'opérateur Σ_q permet parfois de calculer tous les opérateurs Σ_q^n et, donc, de déterminer par voie arithmétique le groupe de Galois générique (*cf.* les exemples dans [4, Part IV]).

III Équations aux q-différences p-adiques

5 Monodromie des équations aux q-différences p-adiques et confluence

5.1. Structures de base de la théorie p-adique des équations aux q-différences

Les instruments et les propriétés fondamentales pour le développement d'une théorie p-adique des équations aux q-différences sont introduits dans [6].

Un système aux q-différences

$$d_qY(x) := \frac{Y(qx) - Y(x)}{(q-1)x} = B_1(x)Y(x)\,, \tag{5.1}$$

avec $B_1(x)$ matrice carrée analytique sur un affinoïde q-invariant fixé, peut être iteré en obtenant ainsi des systèmes d'ordre supérieur :

$$d_q^nY(x) = B_n(x)Y(x)\,,\ \text{avec } B_n(x) = d_qB_{n-1}(x) + B_{n-1}(qx)B_1(x)\ \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Si on considère un point ξ tel que la matrice $B_1(x)$ est analytique en tout point de l'ensemble $q^{\mathbb{Z}}\xi$ et si on pose $B_0(x)$ égal à la matrice identité, alors la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{B_n(\xi)}{[n]_q^!}(x-\xi)(x-q\xi)\cdots(x-q^{n-1}\xi)\,,$$

avec $[0]_q^! = 1$ et $[n]_q^! = \prod_{i=1}^n(1+q+\cdots+q^{n-1})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, est une solution formelle du système (5.1). La structure particulière de la topologie p-adique fait que, si la réduction en caractéristique positive de q ($|q| = 1$!) engendre un groupe cyclique fini et si les $B_n(\xi)$ ne croissent pas trop vite, la somme de cette série est une fonction analytique et représente une solution fondamentale de (5.1), au voisinage de ξ. La raison est que l'ensemble $\xi q^{\mathbb{Z}}$ ne se distribue pas de façon trop chaotique dans l'ensemble $\{|x| = 1\}$, mais s'accumule autour d'un nombre fini de racines de l'unité, qui sont un système de représentants de la réduction de l'ensemble $\xi q^{\mathbb{Z}}$ en caractéristique positive.

L'existence de solutions analytiques de cette forme permet de démontrer le q-analogue des théorèmes suivants :

- le théorème de Dwork-Robba, qui estime la croissance des sup-normes des matrices $B_n(x)$ en termes du rayon de convergence d'une matrice fondamentale locale de solutions (*cf.* [DR80], [Bom81], [And89], [DGS94] et le q-analogue [6, §II]) ;
- le théorème sur la structure de Frobenius faible (*cf.* [Chr81], [CD94] et le q-analogue [6, §III]) ;
- les théorèmes de transfert, permettant de déduire des informations sur le rayon de convergence des solutions dans un disque "voisin" du disque de convergence d'une matrice fondamentale de solutions donnée (*cf.* [Chr84], [And87], [BC92a], [BC92b] et le q-analogue [6, §IV]).

Il est important de remarquer que, plus que l'analogue de la fonction Thêta de Jacobi, ce qui nous manque pour avoir une théorie satisfaisante de la monodromie globale des équations aux q-différences complexes avec $|q| = 1$, est la possibilité de construire une matrice fondamentale de solutions analytiques en un point ordinaire autre que $0, \infty$.

5.2. La conjecture de Crew sur la monodromie locale des équations différentielles p-adiques

Soit $K, |\ |$ un corps complet pour une valuation discrète, avec corps résiduel k parfait. L'anneau de Robba (sur K) est l'anneau des germes de fonctions analytiques :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon>0} \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n : a_n \in K,\ \text{convergent pour } 1-\varepsilon < |x| < 1 \right\} .$$

Cette algèbre de fonctions est naturellement une algèbre différentielle et une algèbre aux q-différences pour tout $q \in K$, tel que $|q| = 1$. Elle a aussi une action du morphisme de Frobenius. Soit $\varphi \in Aut(K)$ un relèvement du morphisme de Frobenius de k, *i.e.* un automorphisme qui vérifie $|\varphi(x) - x^p| < 1$ pour tout $x \in K$. Le morphisme φ agit sur $\mathcal{R}$ de la façon suivante :

$$\varphi\left(\sum_n a_n x^n\right) = \sum_n a_n^{\varphi} x^{pn} .$$

Pour tout s entier positif, le morphisme φ^s vérifie les relations de commutation :

$$\frac{d}{dx} \circ \varphi^s = p^s x^{p^s-1} \varphi^s \circ \frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad \sigma_{q^{\varphi}} \circ \varphi^s = \varphi^s \circ \sigma_{q^{p^s}} . \tag{5.2}$$

Définition 5.1. Un système différentiel avec *structure de Frobenius forte* est la donnée d'un système différentiel $\frac{dY}{dx} = G(x)Y$, avec $G(x) \in M_\mu(\mathcal{R})$, tel qu'il existe $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ et un système associé à l'opérateur φ^s :

$$Y^{\varphi^s} = H(x)Y\ , \ \text{avec } H(x) \in Gl_\mu(\mathcal{R}),$$

qui vérifie la condition suivante d'intégrabilité, venant de (5.2) :

$$HGH^{-1} + \frac{dH}{dx}H^{-1} = p^s x^{p^s-1} G(x)^{\varphi^s} .$$

Naturellement, ceci équivaut à se donner un module différentiel avec structure de Frobenius forte, *i.e.* un module différentiel de rang fini sur $\mathcal{R}/K$, sur lequel on peut définir une structure φ^s-semilinéaire et compatible avec la connexion[4].

Théorème 5.2 (Conjecture de Crew ; [And02], [Meb02], [Ked04])**.** *Tout système différentiel avec structure de Frobenius forte, à coefficients dans $\mathcal{R}/K$, admet une matrice fondamentale de solutions dans une algèbre de la forme $\mathcal{R}'[\log x]$, où $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ est une extension finie étale.*

[4]Cette définition donne lieu à une catégorie qui n'est pas sans analogies avec la catégorie $\mathcal{B}_q^\delta$ définie au §9.5. En effet, dans les deux cas nous avons un module muni d'une structure différentielle et une structure aux différences, avec une condition de compatibilité. Dans les deux cas, cette double structure rigidifie la donnée permettant de "gérer" un problème de petits diviseurs.

Ici c'est la structure différentielle qui présente un problème de petits diviseurs, c'est-à-dire qu'en p-adique nous pouvons avoir des solutions divergentes d'équations différentielles à singularités régulières, suite à la densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$. Citons en exemple le cas de la série hypergéométrique

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} ,$$

qui peut diverger pour certains $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, appelés nombres de Liouville p-adiques.

Dans le cas de la catégorie $\mathcal{B}_q^\delta$ définie dans la suite, c'est la structure aux q-différences qui présente un problème de petits diviseurs.

L'énoncé que nous venons de donner n'est pas assez précis : ce qui est important est que nous connaissons le groupe de Galois de l'extension $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$, grâce à sa structure très particulière. En effet, $\mathcal{R}$ a un sous corps hensélien

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n \in \mathcal{R} : \sup_n |a_n| < \infty \right\} \subset \mathcal{R}$$

ayant pour corps résiduel $k((x))$. Donc, si on fixe une extension ramifiée maximale $\left(\mathcal{E}^\dagger\right)^{unr}/\mathcal{E}^\dagger$, au niveau des groupes de Galois on a :

$$Gal\Big(\left(\mathcal{E}^\dagger\right)^{unr}/\mathcal{E}^\dagger\Big) = Gal\Big(k((x))^{sep}/k((x))\Big) ,$$

où $k((x))^{sep}$ est la clôture séparable de $k((x))$. L'extension construite dans le théorème est de la forme $\mathcal{R}' = \mathcal{R}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\left(\mathcal{E}^\dagger\right)'$, où $\left(\mathcal{E}^\dagger\right)'/\mathcal{E}^\dagger$ est une extension finie non ramifiée. Ceci permet d'identifier le groupe de Galois de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ au groupe de Galois d'une extension finie séparable de $k((x))$:

Corollaire 5.3. *Si k est algébriquement clos, les deux catégories suivantes sont équivalentes :*

- *les modules différentiels sur $\mathcal{R}/K$ avec structure de Frobenius forte ;*
- *les représentations K-rationnelles de $Gal\Big(k((x))^{sep}/k((x))\Big) \times \mathbb{G}_a$.*

5.3. Monodromie locale des équations aux q-différences p-adiques

Dans les notations de la section précédente, fixons $q \in K$, $|q-1| < |p|^{1/(p-1)}$, et supposons qu'il existe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $q^{\varphi^m} = q$.

Définition 5.4. Un système aux q-différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $A(x) \in Gl_\mu(\mathcal{R})$, a une structure de Frobenius forte s'il existe un système $Y(x)^{\varphi^s} = H(x)Y(x)$, avec $s \in m\mathbb{Z}_{>0}$, $H(x) \in Gl_\mu(\mathcal{R})$, tel que (*cf.* (5.2)) :

$$H(qx)A(x)H(x)^{-1} = A(x)^{\varphi^s} A(qx)^{\varphi^s} \cdots A(q^{p^s-1}x)^{\varphi^s} .$$

Encore une fois cette définition est équivalente à la donnée d'un module libre de rang fini sur $\mathcal{R}$ avec des actions semilinéaires inversibles de σ_q et φ^s, compatibles entre elles : c'est ce que nous appelons un module aux q-différences avec structure de Frobenius forte.

Théorème 5.5 ([7, §14])**.** *Tout système aux q-différences sur $\mathcal{R}/K$ avec structure de Frobenius forte admet une matrice fondamentale de solutions à coefficients dans $\mathcal{R}'[\log x]$, où $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ est une extension finie étale.*

L'extension finie étale $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ est exactement du même type que celle qu'on obtient dans le cas différentiel (*cf.* Théorème 5.2). Nous avons donc le corollaire :

Corollaire 5.6. *Si k est algébriquement clos, les deux catégories suivantes sont équivalentes :*

- *les modules aux q-différences sur $\mathcal{R}/K$ avec structure de Frobenius forte ;*
- *les représentations K-rationnelles de $Gal\Big(k((x))^{sep}/k((x))\Big) \times \mathbb{G}_a$.*

5.4. q-Déformations isomonodromiques

Il est naturel de se demander comment dégénère la représentation de la monodromie lorsqu'une famille de systèmes aux q-différences avec structure de Frobenius forte converge vers un système différentiel avec structure de Frobenius forte. Il se trouve que la situation est très rigide :

Théorème 5.7 ([7, §15]). *Si k est algébriquement clos, les catégories suivantes sont équivalentes :*

- *les modules différentiels sur $\mathcal{R}/K$ avec structure de Frobenius forte ;*
- *les modules aux q-différences sur $\mathcal{R}/K$ avec structure de Frobenius forte ;*
- *les représentations K-rationnelles de $Gal\Big(k((x))^{sep}/k((x))\Big)\times\mathbb{G}_a$.*

Le dernier résultat est en réalité beaucoup plus fort que ce que la formulation donnée ici laisse entendre. En effet, considérons un système différentiel (resp. aux q-différences) avec structure de Frobenius forte : il a une solution $Y(x)\in Gl_\mu(\mathcal{R}'[\log x])$. Alors $Y(qx)Y(x)^{-1}:=A(x)\in Gl_\mu(\mathcal{R})$, pour tout $q\in K$, avec $|q-1|<|p|^{1/(p-1)}$ non racine de l'unité et invariant pour une puissance de φ (resp. $\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1}:=G(x)\in M_\mu(\mathcal{R})$).

Remarque 5.8. A. Pulita, dans [Pul06], généralise ce théorème en démontrant le résultat suivant, que nous énonçons dans le cas de l'anneau de Robba $\mathcal{R}$, pour ne pas introduire des notations ultérieures.

Grosso modo, Pulita considère un système différentiel quelconque $\frac{dY}{dx}=G(x)Y$, avec $G(x)\in M_\mu(\mathcal{R})$. Dans un point ξ dans lequel le système est ordinaire il écrit une matrice de solutions $Y(x)$, analytiques au voisinage de ξ. Alors, pour tout q dans un disque $D(1,r)$, où le rayon r dépend du rayon de convergence de $Y(x)$, on peut considérer la matrice $A(q,x)=Y(qx)Y(x)^{-1}$. Il démontre que la matrice $A(q,x)$, pour chaque q fixé, est dans $Gl_\mu(\mathcal{R})$ et qu'elle est en fait une matrice analytique de deux variables $(q,x)\in D(1,r)\times\{1-\varepsilon<|x|<1\}$.

La même construction fonctionne en partant d'un système aux q-différences et en utilisant les solutions analytiques construites dans [6] (*cf.* §5.1).

6 Un q-analogue ultramétrique du théorème de Maillet-Malgrange

Le texte "An ultrametric version of the Maillet-Malgrange theorem for non linear q-difference equations" généralise au cas des équations aux q-différences sur un corps ultramétrique, pour $|q|\neq 1$, un résultat de E. Maillet [Mai03] sur les solutions divergentes des équations différentielles non linéaires, successivement précisé par B. Malgrange [Mal89]. Un théorème q-analogue a été démontré par Ch. Zhang dans le cas complexe [Zha98], pour $|q|\neq 1$.

On fixe un corps normé (ultramétrique) complet $(\Omega,|\ |)$ et un élément $q\in\Omega$, tel que $|q|>1$. On se donne une fonction analytique non nulle $F(x,y_0,\dots,y_n)$ de $n+2$ variables à coefficients dans Ω et on considère l'équation aux q-différences analytique non linéaire $F(x,\Phi)=0$, où on a posé $\Phi=(\varphi(x),\varphi(qx),\dots,\varphi(q^nx))$.

Theorème 6.1 ([8, Cor. 5]). *Soit $\varphi(x)=\sum_{h\geq 0}\varphi_h x^h\in\Omega[[x]]$ une solution formelle de $F(x,\Phi)=0$. Il existe un nombre non négatif s tel que*

$$\sum_{h\geq 0}\frac{\varphi_h}{q^{s\frac{h(h-1)}{2}}}x^h \tag{6.1}$$

est une série convergente, i.e. *$\varphi(x)$ est une série q-Gevrey d'ordre s.*

Nous pouvons être plus précis en ce qui concerne le nombre s. Pour cela nous avons besoin d'introduire quelques définitions.

Définition 6.2. Le *polygone de Newton* $N_q(\mathcal{L})$ d'une équation aux q-différences

$$\mathcal{L}f(x)=\sum_{i=0}^n a_i(x)f(q^ix)=0\,,$$

à coefficients $a_i(x)\in\Omega[[x]]$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\bigcup_{\substack{i=0,\dots,n\\ a_i(x)\neq 0}}\{(i,h):h\geq \mathrm{ord}_{x=0}a_i(x)\}\,. \tag{6.2}$$

Il est facile de voir que le polygone de Newton $N_q(\mathcal{L})$ a un nombre fini de côtés de longueur finie, ayant des pentes rationnelles, éventuellement négatives. Par convention, le côté vertical droit de $N_q(\mathcal{L})$ a pour pente $+\infty$ et le côté gauche $-\infty$.

Théorème 6.3 ([8, Thm. 4])**.** *Soit $\varphi(x) \in \Omega\,[[x]]$ une solution formelle de $F(x,\Phi) = 0$ et soit $r \in]0, +\infty]$ la plus petite pente positive du polygone de Newton de l'équation linéarisée $\mathcal{F}_\varphi f = 0$ de F le long de φ :*

$$\mathcal{F}_\varphi f := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}(x,\Phi) f(q^i x) = 0\,.$$

Si $\frac{\partial F}{\partial y_n}(x,\Phi) \neq 0$, alors $\varphi(x)$ est une série q-Gevrey d'ordre $1/r$.[5]

Dans le cas où q est un paramètre, ce qui est très fréquent dans la littérature sur les fonctions spéciales, on a le corollaire :

Corollaire 6.4 ([8, Thm. 6])**.** *Soit $F(q,x,y_0,\dots,y_n) \in \mathbb{C}[q,x,y_0,\dots,y_n]$ un polynôme en $n+3$ variables, non identiquement nul, et soit $\varphi(x) = \sum_{h\geq 0} \varphi_h x^h \in \mathbb{C}(q)\,[[x]]$ une solution formelle de l'équation aux q-différences $F(q,x,\Phi) = 0$. Alors il existe deux nombres $s, s' \geq 0$ tels que*

$$\limsup_{h\to\infty} \frac{1}{h}\left(\deg_q \varphi_h - s\frac{h(h-1)}{2}\right) < +\infty$$

et

$$\limsup_{h\to\infty} \frac{1}{h}\left(\mathrm{ord}_q \varphi_h - s'\frac{h(h-1)}{2}\right) > -\infty\,.$$

Les exemples d'application de ce résultat ne manquent pas dans la littérature. Dans [8, §2] les deux exemples suivants sont traités en détail : la série génératrice des polynômes de Jones du nœud de 8, qui satisfait à une équation aux q-différences linéaire ; les solutions formelles (hypergéométriques) d'une discrétisation de l'équation de Painlevé II.

Le papier [8] se termine par une digression sur les équations aux q-différences analytiques non linéaires avec $|q| = 1$: nous y reviendrons plus tard (*cf.* §10).

IV Équations aux q-différences dans le champ complexe

Les résultats évoqués précédemment illustrent le clivage entre la théorie des équations aux q-différences analytiques, linéaires ou pas, lorsque $|q| \neq 1$ et la théorie dans le cas d'une homothétie de norme 1. En effet, une solution formelle d'une équation aux q-différences analytique est
◗ une série q-Gevrey d'ordre positif ou nul, si $|q| \neq 1$ (pour le cas complexe *cf.* [Béz92b], [Béz92a], [Zha98], et pour le cas p-adique *cf.* [BB92] and [8]) ;
◗ une série toujours convergente, si $|q| = 1$ et des hypothèses diophantiennes convenables sont vérifiées (*cf.* [Béz92b], [8]).
En d'autres termes, les solutions formelles en 0 d'équations aux q-différences ont *tendance* à être divergentes[6] si $|q| \neq 1$ et convergentes si $|q| = 1$.

Cette troisième partie est dédiée au travaux [9] et [12], qui sont une contribution à la compréhension de ces deux phénomènes.

[5] Nous avons implicitement adopté la convention : $1/+\infty = 0$.

[6] Les équations aux q-différences avec $|q| \neq 1$ ont toujours une base de solutions méromorphes, mais celles-ci peuvent éventuellement, et même presque tout le temps, avoir une singularité essentielle en zéro.

7 Équations aux q-différences singulières régulières : resommation et confluence

7.1. Quelques mots sur le cas différentiel

On dit que $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]] \smallsetminus \mathbb{C}[x]$ est une *série Gevrey générique* si elle est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$(7.1) \qquad a_n(x) \left(x^2\partial\right)^{(n)} y(x) + a_{n-1}(x) \left(x^2\partial\right)^{(n-1)} y(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = g(x)\,,$$

où $\partial = \frac{d}{dx}$ et $a_i(x), g(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ sont des germes de fonctions analytiques à coefficients complexes, avec $a_0(0)a_n(0) \neq 0$. Ceci implique que la transformation de Borel formelle $\mathcal{B}(\hat{f}) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\xi^n$ de $\hat{f}$ est un germe de fonction analytique : $\mathcal{B}(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{\xi\}$. L'exemple le plus célèbre est la série d'Euler :

$$\hat{E}(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n! x^n\,,$$

qui est solution de l'équation différentielle $x^2\partial y + y = x$.

Une série Gevrey générique $\hat{f}$ a la propriété suivante : $\mathcal{B}(\hat{f})$ peut-être continuée analytiquement en presque toutes les directions $d \in]0, 2\pi]$ et l'intégrale de Laplace le long de $e^{id}\mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{S}^d(\hat{f}) = \int_0^{e^{id}\infty} \mathcal{B}(\hat{f})(\xi) e^{-\xi/x} d\xi\,,$$

appelée *somme de Borel de $\hat{f}$ dans la direction* d, représente une solution de (7.1), analytique sur un secteur convenable contenant la direction d et asymptotique à $\hat{f}$ en zéro. Ce résultat est le point de départ pour la théorie, désormais classique, de la resommation (*cf.* [RM90, Mal95, LR90, LR95]).

7.2. La série d'Euler et son q-analogue

Considérons un nombre q, qu'on peut supposer, pour simplifier, réel, positif et différent de 1, et considérons le q-analogue de la série d'Euler :

$$\hat{E}_q(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n [n]_q^! x^{n+1}\,.$$

La série $\hat{E}_q(x)$ est solution de l'équation aux q-différences $x^2 d_q y + y = x$ et est, donc, une discrétisation de la série d'Euler, dans un sens intuitif évident. Elle tend coefficient par coefficient vers la série d'Euler classique $\hat{E}(x)$, mais nous nous trouvons face à une dichotomie curieuse : si $q < 1$ la série $\hat{E}_q(x)$ converge et a pour rayon de convergence $1 - q$, alors que pour $q > 1$ elle diverge.

Pour $q < 1$ la somme de $\hat{E}_q(x)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant un pôle simple en $q^n(q-1)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Lorsque $q \to 1^-$, cet ensemble discret de pôles s'accumule sur la demi-droite $\mathbb{R}_{\leq 0}$: ceci justifie, au moins d'un point de vue heuristique, le fait que la série "limite" $\hat{E}(x)$ est divergente et que $\hat{E}(x)$ ne peut pas être resommée dans la direction $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Nous prouvons que $\hat{E}_q(x)$ converge uniformément vers la somme de Laplace de $\hat{E}(x)$ sur tout compact de $\mathbb{C}$, qui ne rencontre pas $\mathbb{R}_{\leq 0}$ (*cf.* [9, §1]).

Pour $q > 1$, la série $\hat{E}_q(x)$ est divergente, comme la série d'Euler classique $\hat{E}(x)$. Plusieurs théories de resommation existent et peuvent être utilisées pour la resommer : dans le cas de la q-série d'Euler il est possible d'établir les liens entre les différentes sommes via des calculs explicites (*cf.* [9, §3]).

Ces phénomènes que nous venons de décrire pour la série d'Euler sont en fait beaucoup plus généraux, comme nous allons le voir dans un instant.

7.3. Déformation convergente de séries divergentes

Soit $y(q,x)=\sum_{n\geq 0} y_n(q)x^{n+1}\in x\mathbb{C}[[x]]$ une famille de séries formelles, avec $q\in(\eta,1]$, $\eta\in(0,1)$. On suppose que les $y_n(q)$ sont des fonctions continues de q et que la famille

$$\phi(q,\xi)=\mathcal{B}_q y(q,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{y_n(q)}{[n]_q^!}x^n\in\mathbb{C}\{\xi\}\,,$$

où on a posé $[n]_1^!=n!$, est solution d'une famille d'équations sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, fuchsiennes et non résonantes à l'∞, dans un sens qui est assez intuitif, et qu'il n'est peut-être pas nécessaire de spécifier ici, (*cf.* [9, Assumption 2.7] pour des détails). Il faut noter que les séries $y(q,x)$, pour $q<1$, sont convergentes : elle sont même des germes de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier. D'un autre côté, $y(1,x)$ est une série divergente.

Théorème 7.1 ([9, Thm. 2.6])**.** *Soit $d\in[0,2\pi)$ une direction telle que $\phi(1,x)$ est holomorphe dans un domaine contenant la demi-droite $e^{id}\mathbb{R}^+$. Alors pour tout $x\in V:=\{|\arg x-d|<\frac{\pi}{2}\}$, on a :*

$$\lim_{q\to 1^-} y(q,x)=\mathcal{S}^d(y(1,x))=\int_0^{e^{id}\infty}\phi(1,\xi)e^{-\xi/x}d\xi\,,$$

la convergence étant uniforme sur les compacts de V.

Ce résultat implique directement les deux corollaires suivants.

Déformation à coefficients constants d'une équation différentielle. Soit $y(x)=\sum_{n\geq 0} y_n x^{n+1}\in x\mathbb{C}[[x]]$ une série formelle telle que $\phi(\xi)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}\xi^n$ est solution d'une équation différentielle $\sum_{i=0}^{\mu}A_i(\xi)(x\partial)^i\phi=0$ sur $\mathbb{P}^1$, fuchsienne et non résonante à l'∞. On peut construire explicitement une famille de séries formelles $\mathbf{y}_q(x)$, avec $q\in(0,1)$, telle que $\mathcal{B}_q\mathbf{y}_q(\xi)$ est solution de $\sum_{i=0}^{\mu}A_i(\xi)(xd_q)^i\phi=0$ et que $\mathbf{y}_q(x)$ converge coefficient par coefficient vers $y(x)$ lorsque $q\to 1^-$. Ceci est possible car à la fois l'équation différentielle et l'équation aux q-différences peuvent être réécrites en termes de relations de récurrence vérifiées par les coefficients de leurs solutions formelles.

Corollaire 7.2 ([9, Cor. 2.9])**.** *La famille $\mathbf{y}_q(x)$ converge vers la somme de Borel $\mathcal{S}^d y(x))$ de $y(x)$, lorsque $q\to 1^-$, uniformément sur les compacts d'un secteur convenable de la forme $V=\{|\arg x-d|<\pi/2\}$.*

Équations hypergéométriques convergentes. Considérons les paramètres $a,b\in\mathbb{C}$, tels que $a-b\notin\mathbb{Z}$, et la série hypergéométrique basique :

$$\Phi(a,b;q,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(q^a;q)_n(q^b;q)_n}{(q;q)_n}\left(\frac{x}{1-q}\right)^n\,,$$

où $(a;q)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)$.

Corollaire 7.3 ([9, Cor. 2.11])**.** *La fonction analytique $\Phi(a,b;q,x)$ converge uniformément vers la somme de Borel de la série hypergéométrique classique :*

$${}_2F_0(a,b;-;x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{n!}x^n\,,\ \ \textit{où}\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n),$$

lorsque $q\to 1^-$, sur les compacts d'un secteur convenable.

7.4. Différentes méthodes de q-resommation

Supposons maintenant $q \in (1, \infty) \subset \mathbb{R}$. Nous considérons la série q-exponentielle et la fonction Thêta (ici $p = q^{-1}$) :

$$e_q(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{[n]_q^!} \text{ et } \theta_p(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{n(n-1)/2} x^n .$$

Étant donnée une série $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} f_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$, dans la littérature on considère deux transformations de q-Borel formelles, notamment :

$$\mathcal{B}_q \hat{f} = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{[n]_q^!} x^n \text{ et } B_q \hat{f} = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{q^{n(n-1)/2}} x^n .$$

Il faut remarquer que $[n]_q^! \sim q^{n(n-1)/2}/(q-1)^n$, pour $n \to \infty$. Pour presque toute direction $d \in (-\pi, \pi]$ et tout $\lambda \notin -p^{\mathbb{Z}}$, on pose :

$$\mathcal{S}_q^d \hat{f} = \frac{q-1}{\ln q} \int_0^{e^{id}\infty} \frac{\mathcal{B}_q \hat{f}}{e_q(q\frac{\xi}{x})} d\xi , \quad S_q^d \hat{f} = \frac{q}{\ln q} \int_0^{e^{id}\infty} \frac{B_q \hat{f}}{\theta_p(q\frac{\xi}{x})} d\xi ,$$

$$\mathcal{S}_q^{[\lambda]} \hat{f} = q \int_{\lambda p^{\mathbb{Z}}} \frac{\mathcal{B}_q \hat{f}}{e_q(q\frac{\xi}{x})} d_p\xi , \qquad S_q^{[\lambda]} \hat{f} = \frac{q}{1-p} \int_{\lambda p^{\mathbb{Z}}} \frac{B_q \hat{f}}{\theta_q(q\frac{\xi}{x})} d_p\xi ,$$

où les intégrales discrètes à la deuxième ligne, sont appelées intégrales de Jackson[7]. On notera d'un côté que les quatre intégrales plus haut sont des déformations en un sens intuitif de l'intégrale de Laplace, de l'autre qu'elles ont une nature très différente. En "bougeant" un peu la direction d, on obtient des prolongements analytiques des deux fonctions $\mathcal{S}_q^d \hat{f}$ et de $S_q^d \hat{f}$, mais en "bougeant" un peu λ on obtient une famille de fonctions deux à deux distinctes, indexée par $\lambda q^{\mathbb{Z}}$: pour s'en convaincre il suffit de remarquer que les pôles et les zéros des $\mathcal{S}_q^{[\lambda]} \hat{f}$ et de $S_q^{[\lambda]} \hat{f}$ dépendent de λ. Ces procédés de resommation sont connus et étudiés (*cf.* [Zha99], [MZ00], [Zha00], [RZ02]), ainsi que leurs propriétés, mais les relations entre eux restent à élucider.

Si $\hat{f}$ est une série q-Gevrey générique, *i.e.* si elle est solution d'une équation aux q-différences de la forme[8]

$$a_n(x) \left(x^2 d_q\right)^{(n)} y(x) + a_{n-1}(x) \left(x^2 d_q\right)^{(n-1)} y(x) + \cdots + a_0(x) y(x) = g(x) , \tag{7.2}$$

où $a_i(x), g(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, avec $a_0(0) a_n(0) \neq 0$, alors $\mathcal{S}_q^d \hat{f}$ et $S_q^d \hat{f}$ (resp. $\mathcal{S}_q^{[\lambda]} \hat{f}$ et $S_q^{[\lambda]} \hat{f}$) représentent des solutions de (7.2), méromorphes sur la surface de Riemann du logarithme (resp. sur $\mathbb{C}^*$).

Théorème 7.4 ([9, Thm. 4.14]). *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ une série q-Gevrey générique. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^* \smallsetminus \cup_{i=1}^n \mu_i q^{\mathbb{Z}}$, pour des $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}^*$ convenables, et presque toute direction $d \in (-\pi, \pi]$, on a*

$$\mathcal{S}_q^d \hat{f} = S_q^d \hat{f} \text{ et } \mathcal{S}_q^{[\lambda]} \hat{f} = S_q^{[\lambda]} \hat{f} .$$

De plus :

$$\mathcal{S}_q^d \hat{f} = \frac{1}{\ln q} \int_1^q \mathcal{S}_q^{[\lambda]} \hat{f} \, \frac{d\lambda}{\lambda} .$$

[7] L'intégrale de Jackson est une somme infinie, définie par

$$\int_{\lambda p^{\mathbb{Z}}} f(\xi) d_p\xi := (1-p)\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(p^n \lambda) p^n ,$$

pour tout fonction f telle que le terme de droite converge.

[8] Il s'agit d'une équation aux q-différences non homogène dont le polygone de Newton a une seule pente égale à 1.

8 Perspectives : confluence des matrices de Stokes

Considérons un système aux q-différences fuchsien sur $\mathbb{P}^1$, avec $q \in \mathbb{C}$, $|q| \neq 1$, *i.e.*

$$Y(qz) = A(z)Y(z)$$

avec $A(z) \in Gl_n(\mathbb{C}(z))$ et $A(0), A(\infty) \in Gl_n(\mathbb{C})$. Avec quelques précautions et en utilisant un algorithme de Frobenius adéquat, on peut montrer qu'un tel système admet une matrice fondamentale Y_0 de solutions en 0, qui s'avère être méromorphe sur $\mathbb{C}^*$, et une matrice fondamentale Y_∞ de solutions à l'infini, qui est méromorphe, elle aussi, sur $\mathbb{C}^*$ (*cf.* [Sau00]). Il n'est pas difficile de se convaincre que $Y_0^{-1}Y_\infty$ est une matrice méromorphe et q-invariante sur $\mathbb{C}^*$:

$$Y_0^{-1}(qx)Y_\infty(qx) = Y_0^{-1}(x)A(x)^{-1}A(x)Y_\infty(x) = Y_0^{-1}(x)Y_\infty(x)\,,$$

donc méromorphe sur la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Si on a une famille de tels systèmes et si on fait tendre $q \to 1$, de façon à retrouver un système différentiel, la matrice $Y_0^{-1}Y_\infty$ tend vers une matrice localement constante sur $\mathbb{P}^1$ privé de quelques spirales continues. Cette matrice localement constante permet de décrire la monodromie globale du système différentiel limite (*cf.* [Sau00], [5]).

Grâce aux travaux de J.-P. Ramis, J. Sauloy et Ch. Zhang, l'étude des systèmes aux q-différences à singularités irrégulières est assez complète (phénomènes de Stokes, resommation...). Il reste à comprendre ce qui se passe lorsque $q \to 1$. Le travail en collaboration avec Ch. Zhang décrit plus haut suggère une voie pour l'instant peu ou pas du tout explorée. Regardons le théorème 7.1 : les pôles des fonctions $y(q,z)$ forment des ensembles discrets contenus dans un nombre fini de demi-droites. Quand on fait tendre $q \to 1$, ces pôles s'accumulent le long de ces demi-droites jusqu'à ce que la demi-droite en question devienne une direction dans laquelle on ne peut pas sommer la série limite $y(1,z)$. En d'autres termes, les pôles des $y(q,z)$ s'accumulent le long des directions dites anti-Stokes, ce qui permet d'avoir une convergence uniforme sur les compacts d'un secteur V convenable.

Nous espérons pouvoir étudier de cette façon la confluence dans le cas singulier irrégulier, en exploitant le fait que pour $|q| < 1$ la croissance des $[n]_q^!$ est très modérée, et donc le fait d'avoir affaire à un monde convergent, qui déforme une situation divergente : c'est un projet de recherche en collaboration avec Ch. Zhang. Le cas de la série d'Euler est déjà complètement décrit dans [9].

9 Équations aux q-différences analytiques avec $|q| = 1$

9.1. Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques et équations aux q-différences

Étant donnée la courbe elliptique $\mathcal{E} = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, où $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, Baranovsky et Ginzburg prouvent le théorème suivant :

Théorème 9.1 ([BG96, Thm. 1.2]). *Soit G un groupe algébrique complexe semi-simple. Alors il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des* classes intégrales de conjugaison tordue de $G((z))$ *et l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-fibrés holomorphes semi-stables principaux sur $\mathcal{E}$.*

Ici, $G((z))$ est le groupe des points $\mathbb{C}((z))$-rationnels de G et les classes de conjugaison tordue de $G((z))$ sont les classes de conjugaison des éléments de $G((z))$ par rapport à l'action *tordue* de $G((z))$ sur lui-même, définie par :

$$\begin{array}{ccc} G((z)) \times G((z)) & \longrightarrow & G((z)) \\ g(z), a(z) & \longmapsto & g(qz)a(z)g(z)^{-1} \end{array}.$$

Une classe de conjugaison tordue est dite intégrale si elle contient un élément rationnel sur $\mathbb{C}[[z]]$. Si $G = Gl_n$, ceci est équivalent à la classification des systèmes aux q-différences singuliers réguliers à coefficients dans $\mathbb{C}((z))$ modulo la relation d'équivalence :

> deux systèmes aux q-différences $y(qz) = a(z)y(z)$ et $w(qz) = b(z)w(z)$ sont équivalents s'il existe $g(z) \in G((z))$ tel que $b(z) = g(qz)a(z)g(z)^{-1}$.

S'il existe une extension de $\mathbb{C}((z))$ dans laquelle on peut trouver une matrice fondamentale $y(z)$ de solutions de $y(qz) = a(z)y(z)$ et $w(z)$ de $w(qz) = b(z)w(z)$, ceci revient à dire que $y(z) = g(z)w(z)$.

Si q est un nombre complexe de norme 1, la classification analytique des fibrés sur la courbe elliptique non commutative associée à q est un problème ouvert et se ramène dans ce cas aussi à la classification des systèmes aux q-différences (*cf.* [SV03]). Ceci est une des étapes du *Alterstraum* de Manin [Man04].

L'obstacle principal à cette classification est le problème des petits diviseurs. Par exemple, l'équation aux q-différences

$$y(qz) - y(z) = \frac{z}{1-z}$$

a une solution formelle donnée par $1 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{q^n - 1}$, laquelle peut être divergente pour certains q sur le cercle unité (notamment pour les $q = e^{2i\pi\tau}$ tels que $\tau \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ n'est pas un nombre de Brujno, *cf.* [HW88], [Lub98]). Soibelman et Vologodsky établissent dans le même papier des résultats sur la classification formelle, qui naturellement n'est pas touchée par le problème de la minoration des termes de la forme $q^n - 1$.

9.2. Classification analytique locale des équations aux q-différences dans le cas $|q| \neq 1$

Grâce à la factorisation analytique des opérateurs aux q-différences, Sauloy classifie les équations aux q-différences analytiques (dont le polygone de Newton[9] est) à pentes entières (*cf.* [Sau02a], [Sau04]). La partie formelle de ses travaux recoupe les papiers [BG96] et [SV03], où l'approche est inspirée par la géométrie algébrique.

Pour fixer les idées, on considère un nombre complexe q, avec $|q| > 1$. Un opérateur aux q-différences à pentes entières

$$a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_n(z)\sigma_q^n \,, \tag{9.1}$$

où $a_i(z)$ sont des germes de fonctions analytiques en 0 et $\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz)$, admet toujours une factorisation de la forme :

$$(z^{\mu_n}\sigma_q - c_n)h_n \circ \cdots \circ (z^{\mu_2}\sigma_q - c_2)h_2 \circ (z^{\mu_1}\sigma_q - c_1)h_1 \,,$$

où $\mu_i \in \mathbb{Q}$, $\mu_i \leq \mu_{i+1}$, $c_i \in \mathbb{C}^*$ et les h_i sont des germes de fonctions analytiques en 0, telles que $h_i(0) = 1$. Ceci est un résultat fort, car il garantit l'existence d'une base de solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, même dans le cas d'une équation aux q-différences à singularités irrégulières : évidemment une telle factorisation n'existe pas pour les équations différentielles ! Ce résultat entraîne la classification analytique des système aux q-différences. Il a été généralisé au cas des pentes rationnelles, ainsi que la classification qui s'en suit, dans [vdPR06]. Rappelons que les germes de ces travaux sont déjà présents dans les papiers d'Adams, Birkhoff et Guenther (*cf.* [Ada29], [BG41]).

En somme, la situation est assez bien comprise lorsque q est un nombre complexe de norme différente de 1. En revanche, la littérature sur le cas "$|q| = 1$" est très pauvre (*cf.* [Car13], [Béz92b]).

[9] Le polygone de Newton est défini comme dans le §6, Définition 6.2.

9.3. Factorisation analytique des opérateurs aux q-différences dans le cas $|q| = 1$

Soit q un nombre complexe de norme 1, non racine de l'unité. Considérons à nouveau un opérateur aux q-différences à coefficients analytiques en 0 :

$$\mathcal{L} = a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_n(z)\sigma_q^n \quad , \quad \text{avec } a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}\,.$$

Il n'est pas restrictif de supposer que les coefficients $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ ne s'annulent pas tous en 0. Si 0 est une pente du polygone de Newton de $\mathcal{L}$, on appelle

$$a_\nu(0)T^\nu + a_{\nu-1}(0)T^{\nu-1} + \cdots + a_0(0)\,.$$

le *polynôme caractéristique de la pente* 0 *de* $\mathcal{L}$. Avec des manipulations élémentaires sur les pentes il est toujours possible de transformer une pente en la pente zéro (*cf.* [Sau04, §1.1] et [12, Rmk. 2.4]) et, donc, de définir le polynôme caractéristique de n'importe quelle pente du polygone de Newton de $\mathcal{L}$ (*cf.* [Sau04] et [12, §2.2]). On appelle *exposants de la pente μ (du polygone de Newton) de* $\mathcal{L}$ l'ensemble des zéros non nuls de son polynôme caractéristique, comptés avec leurs multiplicités.

Définition 9.2 ([12, §2.2])**.** Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les exposants de la pente μ de $\mathcal{L}$ et soit

$$\underline{\Lambda} = \{\lambda_i\lambda_j^{-1} \ : \ i,j = 1, \ldots, r\,;\ \lambda_i\lambda_j^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}\}\,.$$

On dit que la pente μ est *admissible* (resp. *quasi admissible*) si $\mu \in \mathbb{Z}$ (resp. $\mu \in \mathbb{Q}$) et si la série

$$\phi_{(q;\underline{\Lambda})}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\prod_{\alpha\in\underline{\Lambda}}(1-\alpha)(1-q\alpha)\cdots(1-q^{n-1}\alpha)}$$

est convergente. L'opérateur $\mathcal{L}$ est dit *admissible* (resp. *quasi admissible*) si toutes ses pentes sont admissibles (resp. quasi admissibles).

Remarque 9.3. La convergence de la série $\phi_{(q;\underline{\Lambda})}(x)$ est étudiée en détail dans [12, §1] : elle est liée à la propriété de τ, où $q = \exp(2i\pi\tau)$, d'être un nombre de Brujno.

Théorème 9.4 ([12, Thm. 2.7 et 3.16])**.** *Soit $\mathcal{L}$ un opérateur quasi admissible, avec pentes $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ il existe une factorisation de $\mathcal{L}$ de la forme :*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\sigma(1)} \circ \mathcal{L}_{\sigma(2)} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{\sigma(k)}\,,$$

*où $\mathcal{L}_{\sigma(i)} \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ est un opérateur quasi admissible à une seule pente égale à μ_i. L'ordre (*i.e. *le degré en σ_q) de $\mathcal{L}_{\sigma(i)}$ est égal à la longueur de la projection de la pente μ_i sur l'axe des abscisses.*

Dans le cas d'une pente admissible on peut être plus précis :

Proposition 9.5. *Soit $\mu \in \mathbb{Z}$ une pente admissible de $\mathcal{L}$ et soit r la longueur de sa projection sur l'axe des abscisses. L'opérateur aux q-différences $\mathcal{L}$ admet une factorisation $\mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L}_\mu$, telle que :*

1. l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}$ est à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$ et les pentes du polygone de Newton de $\widetilde{\mathcal{L}}$ coïncident avec celles de $\mathcal{L}$ moins la pente μ ;

2. l'opérateur $\mathcal{L}_\mu$ est produit d'opérateurs d'ordre 1 de la forme :

$$\mathcal{L}_\mu = (x^\mu\sigma_q - \lambda_r)h_r(x) \circ (x^\mu\sigma_q - \lambda_{r-1})h_{r-1}(x) \circ \cdots \circ (x^\mu\sigma_q - \lambda_1)h_1(x)\,,$$

où :

* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ *sont les exposants de la pente* μ*, ordonnés de façon que si* $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ *alors* $i < j$ *;*
* $h_1(x), \dots, h_r(x) \in 1 + x\mathbb{C}\{x\}$.

De plus si $\mathcal{L}$ *est admissible (resp. quasi admissible), l'opérateur* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *l'est aussi.*

Corollaire 9.6. *Tout opérateur quasi admissible admet une factorisation en facteurs d'ordre* 1 *à coefficients dans* $\mathbb{C}\{x^{1/r}\}$*, pour un* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *convenable.*

Concluons par un petit exemple qui met en évidence l'importance de l'hypothèse d'admissibilité.

Exemple 9.7. Considérons la série $\Phi_{(q;\lambda)}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1-\lambda)\cdots(1-\lambda q^{n-1})}$ définie pour tout $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}$. La série $\Phi(x) = \Phi_{(q;q\lambda)}((1-q)x)$ (*cf.* [12, Lemma 1.3]), est solution de l'opérateur aux q-différences

$$\mathcal{L} = (\sigma_q - 1) \circ [\lambda\sigma_q - ((q-1)x + 1)] \, .$$

Cet opérateur est déjà factorisé et ses exposants sont $1, \lambda^{-1}$. Si la série $\Phi(x)$ est convergente, *i.e.* si et seulement si l'opérateur $\mathcal{L}$ est admissible, alors l'opérateur $(\sigma_q - 1) \circ \Phi(x)^{-1}$ est un facteur droit de $\mathcal{L}$. En d'autres mots, si $\mathcal{L}$ n'est pas admissible nous ne pouvons pas *factoriser à droite l'exposant* 1.

9.4. Classification analytique locale des modules aux q-différences avec $|q| = 1$

Soit $\mathbf{K}$ le corps de germes de fonction méromorphes au voisinage de zéro. Un module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Sigma_q)$ sur $\mathbf{K}$ est la donnée d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de rang fini ν sur $\mathbf{K}$ et d'une bijection σ_q-semilinéaire $\Sigma_q : M \to M$, *i.e.* d'un morphisme bijectif $\mathbb{C}$-linéaire tel que $\Sigma_q(fm) = \sigma_q(f)\Sigma_q(m)$, pour tout $f \in \mathbf{K}$ et $m \in M$.

Le lemme du vecteur cyclique assure qu'il existe toujours un opérateur aux q-différences $\mathcal{L}$ à coefficients analytiques en zéro tel que

$$M \cong \frac{F[\sigma_q]}{F[\sigma_q]\mathcal{L}} \tag{9.2}$$

et que l'action de Σ_q coïncide avec celle induite par σ_q. On appellera polygone de Newton de $\mathcal{M}$ le polygone de Newton d'un opérateur $\mathcal{L}$ qui réalise un isomorphisme de la forme (9.2) et on dira que $\mathcal{M}$ est (quasi) admissible (ou pur de pente μ), si $\mathcal{L}$ l'est. Il faut, bien entendu, vérifier que ces définitions sont bien posées (*cf.* [Sau04] et [12, §3.1])

Le Théorème 9.4 est essentiellement équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème 9.8 ([12, Thm. 3.14])**.** *Soit* $\mathcal{M} = (M, \Sigma_q)$ *un module aux* q*-différences sur* $\mathbf{K}$ *quasi admissible, avec pentes* $\mu_1, \dots, \mu_k$*, alors*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k \, ,$$

où les modules aux q*-différences* $\mathcal{M}_i = (M_i, \Sigma_{q|M_i})$ *sont définis sur* $\mathbf{K}$*, sont quasi admissibles et ont une seule pente* μ_i*. Leur rang est égal à la longueur de la projection de la pente* μ_i *sur l'axe des abscisses.*

Chaque $\mathcal{M}_i$ *est somme directe des modules aux* q*-différences sur* $\mathbf{K}$*, quasi admissibles, indécomposables et qui s'obtiennent par extension iterée non triviale d'un module simple par lui même.*

Regardons de plus près la structure des modules aux q-différences simples (ou irréductibles) On considère l'opérateur $x^{\mu/r}\sigma_q - \lambda$, ou bien l'équation

$$y(qx) = \frac{\lambda}{x^{\mu/r}} y(x) \, ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mu, r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ et $(\mu, r) = 1$, et le module aux $q^{1/r}$-différences $\mathcal{M}_{\mu,\lambda,r}$ sur $\mathbf{K}(x^{1/r})$ associé. Les modules simples quasi admissibles sur $\mathbf{K}$ sont tous obtenus par restriction des scalaires à $\mathbf{K}$ depuis les modules de la forme $\mathcal{M}_{\mu,\lambda,r}$, et *vice versa* tous les modules construits ainsi sont simples et quasi admissibles (*cf.* [12, §3.4]).

Une conséquence de ces résultats est que deux modules aux q-différences quasi admissibles sur $\mathbf{K}$ sont isomorphes en tant que modules aux q-différences si et seulement s'ils sont isomorphes en tant que modules aux q-différences formels, *i.e.* après extension des scalaires au corps des séries de Laurent $\mathbb{C}((x))$ (*cf.* [12, §3.6]). L'assertion inverse est aussi vraie :

Théorème 9.9 ([12, Thm. 3.6])**.** *La catégorie des modules quasi admissibles coincide avec la souscatégorie plaine de la catégorie des modules aux q-differences $\mathcal{M}$ sur $\mathbf{K}$ ayant la propriété suivante : tout module au q-différences $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{K}$, tel que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deviennent isomorphes sur $\mathbb{C}((x))$, est déjà isomorphe à $\mathcal{M}$ sur $\mathbf{K}$.*

Cette situation est bien différente du cas $|q| \neq 1$ où les classes d'équivalences analytiques correspondant à une classe d'équivalence formelle fixée forment une variété affine complexe de dimension

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_j - \mu_i)\,,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont les pentes du polygone de Newton de la classe d'équivalence formelle et $r_1, \dots, r_k$ sont les longueurs de leurs projections respectives sur l'axe des abscisses (*cf.* [RSZ04], [Sau02b], [vdPR06, Thm. 3.2]).

9.5. Comparaison avec les résultat dans [BG96], [SV03] et [MvS]

Les résultats plus haut peuvent être réécrits dans une formulation plus proche de celle utilisée par Soibelman et Vologodsky, notamment :

Théorème 9.10 ([12, Thm. 4.3])**.** *La catégorie des modules aux q-différences quasi admissibles sur $\mathbf{K}$ est équivalente à la catégorie des objets $\mathbb{Q}$-gradués de la catégorie des modules aux q-différences quasi admissibles sur $\mathbf{K}$ avec une seule pente égale à zéro (*i.e. *singuliers réguliers).*

Naturellement, dans l'énonce précédent la composante homogène de (M, Σ_q) de degré $\mu \in \mathbb{Q}$ est le plus grand sous-module aux q-différences de M dont le polygone de Newton a une seule pente égale à μ.

Théorème 9.11 ([12, Thm. 4.2])**.** *La catégorie des modules aux q-différences sur $\mathbf{K}$, admissibles et purs de pente 0 (*i.e. *singuliers réguliers) est équivalente à la catégorie des espaces vectoriels complexes V, $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$-gradués, de dimension finie, équipés d'un opérateur nilpotent qui respecte la graduation et tels que la propriété suivante est vérifiée :*

> *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ un ensemble de représentants des classes de $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ pour lesquels la composantes homogène de V associée à $\lambda \mod q^{\mathbb{Z}}$ est non nulle. Alors la série $\Phi_{(q,\underline{\Lambda})}(x)$ (définie comme dans la Définition 9.2) est convergente.*

Considérons maintenant les deux catégories suivantes (*cf.* [MvS]) :

• La catégorie $\mathcal{B}_q^{an,reg}$ des modules aux q-différences (M, Σ_q) de rang fini sur $\mathbf{K}$, tels qu'il existe une base $\underline{u}$ de M sur $\mathbf{K}$ dans laquelle l'opérateur Σ_q agit via une matrice constante.

• La catégorie $\mathcal{B}_q^{\delta}$ des modules aux q-différences (M, Σ_q) de rang fini sur l'anneaux $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, qui peuvent être munis d'une connexion singulière régulière qui commute à l'action de Σ_q. Cela signifie que :
1) on peut définir une action ∇ de $\delta = x\frac{d}{dx}$ sur M telle que $\nabla(fm) = \delta(f)m + f\nabla(m)$, pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ et $m \in M$;
2) il existe une base $\underline{e}$ de M sur $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ dans laquelle $\nabla\underline{e} = \underline{e}A$, avec $A \in M_{\nu\times\nu}(\mathcal{O}(\mathbb{C}))$;
3) $\nabla \circ \Sigma_q = \Sigma_q \circ \nabla$.

Alors :

Théorème 9.12. *Les catégories $\mathcal{B}_q^{an,reg}$ et $\mathcal{B}_q^{\delta}$ sont équivalentes.*

La preuve du Théorème 9.1 de Baranovsky et Ginzburg, se base sur la propriété des fibrés semistables de pouvoir être munis d'une connexion singulière régulière (*cf.* [BG96, Prop. 4.1 and Thm. 4.2]). De ce point de vue, nous pouvons considérer le Théorème 9.12 comme un analogue analytique non commutatif du Théorème 9.1.

Remarque 9.13. Le dernier théorème énoncé est le seul dans lequel il est important de considérer $\mathbb{C}$ comme corps de base : tout les autres résultats de la section §9 sont valables sur un corps normé et algébriquement clos, éventuellement non archimédien.

10 Équations aux q-différences non linéaires avec $|q| = 1$

Deux équations aux q-différences spécifiques, avec $|q| = 1$, ont été très étudiées au cours du vingtième siècle, pour leurs liens avec les systèmes dynamiques. L'une est l'équation (non linéaire) de linéarisation des germes des difféomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$:

$$y(qz) = F(y(x)), \tag{10.1}$$

où $|q| = 1$, q n'est pas une racine de l'unité, et $F(x)$ est une fonction analytique en 0, telle que $F(0) = 0$ et $F'(0) = q$. L'autre est appelée équation cohomologique (car elle est liée à la cohomologie du groupe $q^{\mathbb{Z}}$) :

$$y(qx) - y(x) = xf(x), \tag{10.2}$$

où $f(x)$ est un germe de fonction analytique en 0. Grâce aux travaux de Poincaré, König, Brjuno, Yoccoz, ..., on sait que ces deux équations ont une solution analytique si $q = e^{2i\pi\tau}$ et $\tau \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ est un nombre de Brjuno (*cf.* [Mar00], [Yoc95]). La condition de Brujno est d'ailleurs équivalente à la convergence de la série

$$\Phi_{(q;q)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

Bézivin (*cf.* [Béz92b], [Béz92a]) a démontré que toute solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire, vérifiant des hypothèses diophantiennes convenables, est convergente : une version améliorée de cet énoncé est à la base des résultats de [12], rappelés dans ce texte au paragraphe §9.3.

Les travaux de Bézivin nous ont permis de démontrer, en nous inspirant de la preuve de B. Malgrange [Mal89], que toute solution formelle d'une équation aux q-différences analytique est convergente lorsque $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, vérifie certaines conditions diophantiennes (*cf.* [8, Thm. 8]). À la lumière des résultats de [12], nous pouvons en donner une version améliorée. Soit donc Ω un corps normé, complet et algébriquement clos. On peut alors démontrer l'énoncé (*cf.* §9.3 pour la définition de pente admissible) :

Théorème 10.1. *Soit $q \in \Omega$, $|q| = 1$, non racine de l'unité, et soit $\varphi(x) \in \Omega[[x]]$ une solution formelle de $F(x, \Phi) = 0$. On suppose que la pente nulle de l'opérateur $\mathcal{F}_\varphi f = 0$ linéarisé de F le long de φ :*

$$\mathcal{F}_\varphi y := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, \Phi) f(q^i x) = 0,$$

est admissible et que la série $\Phi_{(q;q)}(x)$ converge. Alors la série $\varphi(x)$ est convergente.

En suivant la preuve de [8, Thm. 8], il suffit de démontrer que pour tout germe g de fonction convergente au voisinage de 0, il existe un germe de fonction analytique f en 0, tel que $\mathcal{F}_\varphi f = g$. Ce problème est en réalité un problème de factorisation de $\mathcal{F}_\varphi$, comme ceux considérés dans la classification analytique locale des équations aux q-différences (*cf.* §9.3 plus loin).

À titre d'exemple, esquissons la preuve du théorème 10.1 pour l'équation (10.1). En résolvant explicitement (10.1), on peut se convaincre qu'elle admet toujours une et une seule solution formelle φ, telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

Posons $F(x) = qx + x\widetilde{F}(x)$ et $\varphi(x) = x + x\widetilde{\varphi}(x)$, de façon que $\widetilde{F}(0) = 0$ et $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. Puisque $\widetilde{F}$ est une fonction analytique, on peut l'écrire :

$$\widetilde{F}(x_0 + x) = \widetilde{F}(x_0) + \widetilde{F}'(x_0)x + H(x_0, x)x^2\,,$$

où H est une fonction analytique de deux variables. Il s'en suit que l'équation (10.1) :

$$qx\widetilde{\varphi}(qx) = qx\widetilde{\varphi}(x) + (x + x\widetilde{\varphi}(x))\widetilde{F}(x + x\widetilde{\varphi}(x))$$

est équivalente à une équation non linéaire de la forme :

$$L(x, \widetilde{\varphi}(x)) = q\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(qx) + x\mathcal{L}(x, \widetilde{\varphi}(x)) = 0\,,$$

avec

$$\mathcal{L}(x, \widetilde{\varphi}(x)) = \left(1 + \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x}\right)\left(\widetilde{F}(x) + xF'(x)\widetilde{\varphi}(x) + H(x, x\varphi(x))x^2\varphi(x)^2\right).$$

On considère maintenant l'espace de Banach B (resp. B') des fonctions analytiques nulles en 0, convergentes sur une boule fermée centrée à 0, dont nous allons déterminer le rayon de convergence *a posteriori*, et la fonctionnelle (*cf.* [Mal89], [Zha98], [8])

$$A(\lambda, \psi) : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times B & \longrightarrow & B' \\ (\lambda, \psi) & \longmapsto & L(\lambda x, \psi(x)) \end{array}.$$

On remarque que $A(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial A}{\partial \psi}(0, 0) = q - \sigma_q$. Le but est naturellement d'appliquer le théorème des fonctions implicites : en effet, ceci permet pour chaque λ proche de zéro de déterminer $\psi_\lambda \in B$, telle que $A(\lambda, \psi_\lambda) \equiv 0$. L'unicité des solutions implique que $\psi_\lambda(x) = \widetilde{\varphi}(\lambda x)$ et que $\widetilde{\varphi}(x)$ est convergente.

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut donc démontrer que pour tout $g \in B'$ il existe $f \in B$ telle que

$$qf(x) - f(qx) = g(x)\,.$$

Dans ce cas très simple, on voit directement que cette équation peut être résolue pour chaque $g(x)$ dès que $q = \exp(2i\pi\tau)$ avec $\tau \in (0, 1) \smallsetminus \mathbb{Q}$ nombre de Brujno. Plus généralement on voit qu'il s'agit de trouver une solution analytique, et donc un facteur droit de rang 1 associé à l'exposant 1, de l'opérateur $(\sigma_q - 1)g(x)^{-1}(q - \sigma_q)$: nous nous ramenons donc au problème étudié dans les paragraphes précédents.

11 Perspectives : le cas $|q| = 1$

Le problème principal qui reste à résoudre pour comprendre complètement les équations aux q-différences pour $|q| = 1$ est l'analyse locale des solutions en un point autre que 0 et ∞ : nous avons vu que dans le cas p-adique cet obstacle a été éliminé et il a permis une compréhension de la théorie aussi avancée que celle des équations différentielles.

Un autre problème est de voir comment les systèmes aux q-différences dégénèrent lorsque q tend vers le cercle unité : ceci revient à faire dégénérer une courbe elliptique vers une courbe elliptique non commutative et à regarder le comportement de ses fibrés. À mon avis c'est encore vers les systèmes dynamiques qu'il faut se retourner pour chercher son inspiration. En effet, motivés par les travaux de V. Arnold et M. Hermann, S. Marmi et D. Sauzin et successivement C. Carminati et S. Marmi (*cf.* [MS03], [MS07], [CM08]) ont regardé les équations "de la dynamique" (*cf.* (10.1) et (10.2)) d'un autre point de vue : ils considèrent q comme une variable. Dans les deux cas, ils prouvent que l'équation a une solution $q \mapsto y(q, \cdot)$ qui appartient à un espace de fonction monogène de la forme $\mathscr{M}((K_j), (B_j))$, c'est-à-dire un espace de Fréchet construit comme suit :

1. K_j est une suite non décroissante d'ensembles compacts et connexes par arcs de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tels que les K_j sont obtenus à partir de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ en retirant des "diamants" de plus en plus petits autour des racines de l'unité et tels que $\{q \in \mathbb{C} : |q| \neq 1\} \subset \cup_j K_j$.
2. B_j est l'espace de Banach des fonctions holomorphes et bornées sur un disque $\{|x| < r_j\}$, où r_j est une suite décroissante de réels positifs, de façon qu'on ait une flèche injective $B_j \hookrightarrow B_{j+1}$.

Alors l'espace de fonctions $\mathscr{C}^1_{hol}(K_j, B_j)$ a une structure naturelle d'espace de Banach, ainsi que l'espace $\mathcal{A}_J = \bigcap_{j=0,\dots,J} \mathscr{C}^1_{hol}(K_j, B_j)$, avec la norme $\|f\|_{\mathcal{A}_J} = \max_{j=0,\dots,J} \|f|_{Kj}\|_{\mathscr{C}^1_{hol}(K_j,B_j)}$.
On pose :

$$\mathscr{M}((K_j), (B_j)) = \varprojlim \mathcal{A}_J \,.$$

Il me semble que ceci fournit un cadre idéal pour l'étude de la limite lorsque q tend vers une valeur de $\mathbb{S}^1$, ce qui est une question pratiquement inexplorée. A ce propos, S. Marmi et D. Sauzin étudient [MS03] le comportement des solutions de l'équation (10.2) lorsque q tend vers une valeur du cercle unité. Dans les points de $\cup_j K_j \cap \mathbb{S}^1$, la solution $q \to y(q, \cdot)$ est $\mathscr{C}^\infty$: ils prouvent donc que la solution est asymptotique à son développement, qui est une série Gevrey, donc sommable dans une direction issue du point de $\mathbb{S}^1$ considéré. Une approche analogue est développée pour l'équation (10.1) dans [MS07], [CM08].

Bibliographie

Liste complète des travaux (personnels ou en collaboration)

[1] L. Di Vizio. *Étude arithmétique des équations aux q-différences et des équations différentielles*. Thèse doctorale, Université Paris 6, 2000.

[2] L. Di Vizio. On the arithmetic size of linear differential equations. *Journal of Algebra*, 242(1), 31–59, 2001.

[3] L. Di Vizio. Sur la théorie géométrique des G-fonctions. Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables. *Mathematische Annalen*, 319(1), 181–213, 2001.

[4] L. Di Vizio. Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Inventiones Mathematicae*, 150(3), 517–578, 2002. arXiv : math.NT/0104178

[5] L. Di Vizio, J.-P. Ramis, J. Sauloy, et Ch.Zhang. Équations aux q-différences. *Gazette des Mathématiciens*, (96), 20–49, 2003.

[6] L. Di Vizio. Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. II*, pages 615–675. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004. arXiv : math.NT/0211217.

[7] Y. André et L. Di Vizio. q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, (296), 55–111, 2004.

[8] L. Di Vizio. An ultrametric version of the Maillet-Malgrange theorem for non linear q-difference equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (2008), 2803-2814. arXiv : 0709.2464.

[9] L. Di Vizio et Ch. Zhang. À paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*. arXiv : 0709.1610.

[10] F. Baldassarri et L. Di Vizio. Continuity of the radius of convergence of p-adic differential equations on Berkovich analytic spaces. arXiv : 0709.2008, 2007.

[11] F. Baldassarri et L. Di Vizio. Sur la continuité du rayon de convergence générique sur une polycouronne. Note non publiée, 8 pages, 2008.

[12] L. Di Vizio. Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. À paraître dans *Journal of Noncommutative Geometry*. arXiv : 0802.4223.

Autres références citées

[Ada29] C. R. Adams. On the linear ordinary q-difference equation. *Annals of Mathematics. Second Series*, 30(1-4), 195–205, 1928/29.

[And87] Y. André. Spécialisation dans les disques singuliers réguliers. In *Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique 1985/86*, pages 1–14. Univ. Paris VII, Paris, 1987.

[And89] Y. André. *G-functions and geometry*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[And02] Y. André. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique. *Inventiones Mathematicae*, 148(2), 285–317, 2002.

[And03] Y. André. Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I*, pages 55–112. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[BC92a] F. Baldassarri and B. Chiarellotto. On Christol's theorem. A generalization to systems of PDEs with logarithmic singularities depending upon parameters. In *p-adic methods in number theory and algebraic geometry*, pages 1–24. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[BC92b] F. Baldassarri and B. Chiarellotto. On André's transfer theorem. In *p-adic methods in number theory and algebraic geometry*, pages 25–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[BG96] V. Baranovsky and V. Ginzburg. Conjugacy classes in loop groups and G-bundles on elliptic curves. *International Mathematics Research Notices*, (15), 733–751, 1996.

[Béz91] J.-P. Bézivin. Les suites q-récurrentes linéaires. *Compositio Mathematica*, 80(3), 285–307, 1991.

[Béz92a] J.-P. Bézivin. Convergence des solutions formelles de certaines équations fonctionnelles. *Aequationes Mathematicae*, 44(1), 84–99, 1992.

[Béz92b] J.-P. Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Mathematicae*, 43(2-3), 159–176, 1992.

[BB92] J.-P. Bézivin and A. Boutabaa. Sur les équations fonctionelles p-adiques aux q-différences. *Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica*, 43(2), 125–140, 1992.

[BG41] G. D. Birkhoff et P. E. Guenther. Note on a canonical form for the linear q-difference system. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27, 218–222, 1941.

[Bom81] E. Bombieri. On G-functions. In *Recent progress in analytic number theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*, pages 1–67. Academic Press, London, 1981.

[Bos01] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93), 161–221, 2001.

[Car13] R. D. Carmichael. On the Theory of Linear Difference Equations. *American Journal of Mathematics*, 35(2), 163–182, 1913.

[CM08] C. Carminati et S. Marmi. Linearization of germs : regular dependence on the multiplier. arXiv : 0801.2844, 2008.

[CD94] G. Christol and B. Dwork. Modules différentiels sur des couronnes. *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, 44(3), 663–701, 1994.

[Chr81] G. Christol. Systèmes différentiels linéaires p-adiques, structure de Frobenius faible. *Bull. Soc. Math. France*, 109(1), 83–122, 1981.

[Chr84] G. Christol. Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers. *Astérisque*, (119-120), pages 151–168, 1984.

[CM93] G. Christol et Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. I. *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, 43(5), 1545–1574, 1993.

[CM97] G. Christol et Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. II. *Annals of Mathematics. Second Series*, 146(2), 345–410, 1997.

[CM00] G. Christol et Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. III. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2), 385–457, 2000.

[CM01] G. Christol et Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. IV. *Inventiones Mathematicae*, 143(3), 629–672, 2001.

[CC85b] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations. In *Number theory (New York, 1983–84)*, volume 1135 of *Lecture Notes in Math.*, pages 52–100. Springer, Berlin, 1985.

[DGS94] B. Dwork, G. Gerotto, et F. J. Sullivan. *An introduction to G-functions*, volume 133 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1994.

[DR80] B. Dwork et P. Robba. Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 259(2), 559–577, 1980.

[Gou36] E. Goursat *Leçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent.* Hermann, Paris, 1936.

[Har07] C. Hardouin. Iterative q-Difference Galois Theory. preprint, 2007.

[HW88] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, Oxford, 1988.

[Hon81] T. Honda. Algebraic differential equations. In *Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979)*, pages 169–204. Academic Press, London, 1981.

[Kat82] N. M. Katz. A conjecture in the arithmetic theory of differential equations. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2), 203–239, 1982. et Bull. Soc. Math. France, 110(2), 347-348.

[Ked04] K. S. Kedlaya. A p-adic local monodromy theorem. *Annals of Mathematics. Second Series*, 160(1), 93–184, 2004.

[KX] K. S. Kedlaya et L. Xiao. Differential modules on p-adic polyannuli. En préparation.

[LR90] M. Loday-Richaud. Introduction à la multisommabilité. *Gazette des Mathématiciens*, (44), 41–63, 1990.

[LR95] M. Loday-Richaud. Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation. *Expositiones Mathematicae. International Journal*, 13(2-3), 1995.

[Lub98] D. S. Lubinsky. On q-exponential functions for $|q| = 1$. *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, 41(1), 86–97, 1998.

[Mai03] E. Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Troisième Série*, 20, 1903.

[Mal89] B. Malgrange. Sur le théorème de Maillet. *Asymptotic Analysis*, 2(1), 1–4, 1989.

[Mal95] B. Malgrange. Sommation des séries divergentes. *Expositiones Mathematicae. International Journal*, 13(2-3), 163–222, 1995.

[Man04] Yu. I. Manin. Real multiplication and noncommutative geometry (ein Alterstraum). In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 685–727. Springer, Berlin, 2004.

[Mar00] S. Marmi. An introduction to small divisors. arXiv : math.DS/0009232, 2000.

[Meb02] Z. Mebkhout. Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique. *Inventiones Mathematicae*, 148(2), 319–351, 2002.

[MS03] S. Marmi et D. Sauzin. Quasianalytic monogenic solutions of a cohomological equation. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 164(780), vi+83, 2003.

[MS07] S. Marmi et D. Sauzin. A quasianalyticity property for monogenic solutions of small divisor problems. arXiv : 0706.0138, 2007.

[MvS] S Mahanta et W.D. van Suijlekom. Noncommutative tori and the riemann-hilbert correspondence. arXiv : 0705.1076.

[MZ00] F. Marotte et C. Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(6), 1859–1890, 2000.

[Pon00] É. Pons. Modules différentiels non solubles. rayons de convergence et indices. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 103, 21–45, 2000.

[Pul06] A. Pulita. p-Adic Confluence of q-Difference Equations, 2006. To appear in Compositio Matematicae.

[RM90] J.-P. Ramis et J. Martinet. Théorie de Galois différentielle et resommation. In *Computer algebra and differential equations*, Comput. Math. Appl., pages 117–214. Academic Press, 1990.

[RSZ04] J.-P. Ramis, J. Sauloy, et Ch. Zhang. La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 338(4), 277–280, 2004.

[RZ02] J.-P. Ramis et C. Zhang. Développement asymptotique q-Gevrey et fonction thêta de Jacobi. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 335(11), 899–902, 2002.

[Roq07] J. Roques. Galois groups of the basic hypergeometric equations. A paraître dans *Pacific Journal of Mathematics*, 2007.

[Sau00] J. Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(4), 1021–1071, 2000.

[Sau02a] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. Prépublication du Laboratoire Emile Picard n.249. `arXiv : math.QA/0210221`, 2002.

[Sau02b] J. Sauloy. Classification analytique locale des équations aux q-différences irrégulière. Note on Sauloy's web page, Seminar, 2002.

[Sau04] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé. *Annales de l'Institut Fourier*, 54(1), 181–210, 2004.

[SV03] Y. Soibelman et V. Vologodsky. Noncommutative compactifications and elliptic curves. *International Mathematics Research Notices*, (28), 1549–1569, 2003.

[vdPR06] M. van der Put et M. Revesat. Galois theory of q-difference equations. Preprint, to appear in *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2006.

[Yoc95] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231), 3–88, 1995.

[Zha98] Ch. Zhang. Sur un théorème du type de Maillet-Malgrange pour les équations q-différences-différentielles. *Asymptotic Analysis*, 17(4), 309–314, 1998.

[Zha99] Ch. Zhang. Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables. *Annales de l'Institut Fourier*, 49(1), 227–261, 1999.

[Zha00] Ch. Zhang. Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 331(1), 31–34, 2000.