Résumé des résultats principaux

Ce travail de thèse, intitulé "Étude p-adique des équations aux q-différences et des équations différentielles", est divisé essentiellement en deux parties (plus deux appendices). La première concerne la théorie géométrique des G-fonctions (à plusieurs variables), la deuxième les équations aux q-différences arithmétiques.

Dans la première partie, nous généralisons à plusieurs variables des résultats fondamentaux de la théorie des G-fonctions. La section I se situe autour du Théorème de Dwork sur l'estimation de l'invariant $\tau = \sigma - \varrho$ attaché aux modules différentiels de type G (*cf.* I, Th. 3.1). Nous généralisons au cas de plusieurs variables et d'un corps de nombres quelconque le théorème [D99, Th. 1.1], prouvé à l'origine pour un module différentiel sur $\mathbb{Q}(x)$.

La section II est vouée à la généralisation du théorème de Chudnovsky [A89, VI], qui affirme que le module différentiel engendré par une G-fonction est de type G (*cf.* II, Th. 4.1). On en déduit, grâce aux résultats de la section I, un corollaire plus parlant en vue des applications: le module différentiel engendré par une G-fonction est régulier.

Dans la deuxième partie nous introduisons les modules aux q-différences arithmétiques. Dans la section III nous établissons leurs premières propriétés et nous prouvons un théorème dans le sillage de la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures qui lie la trivialité d'une équations aux q-différences sur le corps des fonctions rationnelles à la trivialité de sa réduction, convenablement définie, modulo p, pour presque tout p (*cf.* III, Th. 7.1). Il est à noter que la conjecture originale dans le cas différentiel est encore un problème ouvert. Les techniques employées dans sa preuve sont empruntées à la théorie des G-fonctions.

La section IV contient un analogue de la caractérisation conjecturale du groupe de Galois différentiel de Katz [K82] pour les équations aux q-différences (*cf.* IV, Th. 2.2). Sa preuve repose sur les résultats de la section précédente. Nous terminons en montrant comment pour

Références.

[Ad31] Adams C.R.: Linear q-difference equations, Bull. A.M.S., 1931, 361-399.

[A89] André Y.: G-functions and Geometry, Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[A00] André Y.: Séries Gevrey de type arithmétique (II: transcendance sans transcendance), Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 741-756.

[D99] Dwork B.: "On the size of differential modules", Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 225-239.

[K82] Katz N. M.: A conjecture in the arithmetic theory of differential equations, Bull. S.M.F. 110, (1982), 203-239, and Bull. S.M.F. 111, (1982), 347-348.

[R92] Ramis J-P.: About the growth of entire functions solutions of linear q-difference equations, Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse, Série 6, Vol. I, 1 (1992), 53-94.

les équations aux q-différences cette description permet, dans certains cas, un calcul effectif et presque immédiat du groupe de Galois, contrairement au cas différentiel.

Le premier appendice est dédié aux q-analogues de la transformation de Fourier pour les équation aux q-différences et à la définition d'un polygône pour ces équations (déjà défini dans [Ad31] et [R92]), inspiré par le polygône de Newton-Ramis. Le deuxième appendice est une tentative de réponse à une question de Y. André posée dans [A00] sur la bonne définition de séries q-Gevrey arithmétiques.

Les deux appendices sont destinés à faire partie d'un travail futur sur la théorie arithmétique des séries q-Gevrey et son application à la théorie de l'irrationalité, inspirée par les résultats de [A00] sur les fonctions q-exponentielles.