THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité:

MATHEMATIQUES

présentée par

Lucia DI VIZIO

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse:

Étude arithmétique des équations aux q-différences et des équations différentielles

Soutenue le 13 décembre 2000 devant le jury composé de :

M Yves André, directeur de thèse

M Francesco Baldassarri

M Jean-Paul Bézivin, rapporteur

M Jean-Benoit Bost

M Gilles Christol

M Jean-Pierre Ramis, rapporteur

Il pudore e la consapevolezza dei limiti del mio lavoro mi fanno pensare che la mia tesi non meriti di essere dedicata. Ciò nonostante, ho l'impressione che una fase stia per finire e non posso impedirmi di pensare alle persone che l'hanno marcata.

Un pensiero affettuoso va a nonna Lucia, che aveva deciso che questo 13 dicembre 2000 sarebbe stato un giorno di festa, e a Fatima, di cui ho ammirato la dignità di fronte alla Morte.

Quanti tempi e quante vite sono scivolate via da te come il fiume che ti passa attorno:
tu che hai visto nascere e morire gli antenati miei lentamente, giorno dopo giorno:
ed io l'ultimo ti chiedo se conosci in me qualche segno, qualche traccia di ogni vita
o se solamente io ricerco in te risposta ad ogni cosa non capita.
Ma è inutile cercare le parole la pietra antica non emette suono
o parla come il mondo o come il sole parole troppo grandi per un uomo.
E te li senti dentro quei legami i riti antichi e i miti del passato
e te li senti dentro come mani ma non comprendi più il significato.
Ma che senso esiste in ciò che è nato dentro ai muri tuoi tutto è morto e nessuno ha mai saputo
o solamente non ha senso chiedersi io più mi chiedo e meno ho conosciuto
ed io l'ultimo ti chiedo se così sarà per un altro dopo che vorrà capire
e se l'altro dopo ti troverà il solito silenzio senza fine.
La casa è come un punto di memoria le tue radici danno la saggezza
e proprio questa è forse la risposta e provi un grande senso di dolcezza

Guccini, Radici

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier le Professeur Bernard Dwork, qui malheureusement n'est plus parmi nous, pour son cours sur les G-fonctions à l'Université de Padoue, dont l'influence sur le travail qui suit est incontournable, et pour m'avoir suggéré de généraliser son théorème sur la taille des modules arithmétiques, suggestion qui m'a amenée à la rédaction du premier chapitre de cette thèse.

Je remercie Yves André pour m'avoir acceptée comme étudiante en thèse, pour m'avoir orientée vers un sujet qui respecte mon inclination et pour le temps qu'il m'a dédié depuis mon D.E.A. J'estime que l'avoir comme directeur de thèse a été une grande chance pour moi.

Je n'oublie pas que le 5 novembre 1990 j'ai suivi mon premier cours à l'université : c'était le cours de "Geometria 1", tenu par Francesco Baldassarri. Je suis très contente qu'il fasse partie du jury de ma thèse. C'est aussi l'occasion de le remercier pour ses enseignements et pour ses conseils sur la première partie de ce travail.

Je suis très honorée que Gilles Christol ait accepté de faire partie de mon jury de thèse, puisque c'est en grosse partie grâce à lui que je suis en France, puisqu'il a toujours suivi mon travail avec beaucoup d'enthousiasme et a toujours été disponible pour répondre à mes questions.

Je remercie Jean-Paul Bézivin et Jean-Pierre Ramis pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, pour leurs remarques et pour l'intêret qu'ils ont montré pour mon travail. Je suis très heureuse qu'ils me fassent l'honneur de participer au jury.

Je voudrais remercier Jean-Benoit Bost pour l'intêret qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté de participer au jury.

Je voudrais remercier l'Equipe de Théorie des Nombres et, plus généralement, l'Institut de Mathématiques de Jussieu pour son accueil et son ambiance. En particulier, je suis reconaissante à Daniel Bertrand pour ses nombreux conseils et sa disponibilité, et à Pierre Colmez pour ses suggestions sur les congruences exponentielles.

Je remercie l'Université de Groningen qui a financé ma participation à l'école "Spring School - Aspects of Ordinary Differential Equations". Ce voyage a été l'occasion d'avoir beaucoup des discussions avec Marius van der Put, que je remercie pour sa disponibilité. Je voudrais enfin remercier Igor Potemine et Jacques Sauloy, et à nouveau Jean-Pierre Ramis, qui se sont occupés de moi lors de mes deux visites à Toulouse. L'intêret qu'ils ont montré pour mon travail est très motivant.

* * *

Vorrei ringraziare tutti coloro (italiani e “italofili/foni”!) coi quali ho condiviso questa avventura, moltissimi caffè e numerose serate in buona compagnia: Filomena, Sara, Lorenzo, Giovanni, Lucia, Francesca, Andrea Venturelli, Lella, Andrea Surroca, Kenji, Gianluca. Un ringraziamento speciale va a Jean-Pierre Marco per le lunghissime chiacchierate e alla TabaK-KaZ, che non vedo da tanto tempo, ma che è sempre virtualemente presente.

Una nota affettuosa per Manu, che ci rivolge ancora la parola nonostante i vari traslochi e le innumerevoli scocciature: Manu, tieni duro! Fra poco avremo la macchina!

Vorrei ringraziare mio padre, per questi ventotto anni di pazienza indefessa, e mia madre che, pur con qualche resistenza iniziale, ha finito per mostrare la sua vera indole di mamma italiana, rispondendo guccinianamente alla mia domanda di aiuto: “Figliola ora sei lì lontano da me, laggiù sono ricchi e di mamme ne han tre, ma la tua mamma italiana ne val cento da sé!”. Questa debolezza finale le è costata la preparazione del rinfresco!

Infine, un pensiero per Zindine che è stata la mia vittima preferita negli ultimi quattro anni: che si faccia coraggio, perché non è finita! Non sono finiti né i miei errori di ortografia in francese, né le dimostrazioni che non riesco a fare, né tutte le altre paranoie di cui ha una conoscenza senza uguali. Lo ringrazio molto della pazienza che ha avuto negli ultimi mesi (e non solo). Quanto al futuro, gli consiglio di pensarci bene, prima che sia troppo tardi!

Résumé des résultats principaux

Ce travail de thèse, intitulé "Étude p-adique des équations aux q-différences et des équations différentielles", est divisé essentiellement en deux parties (plus deux appendices). La première concerne la théorie géométrique des G-fonctions (à plusieurs variables), la deuxième les équations aux q-différences arithmétiques.

Dans la première partie, nous généralisons à plusieurs variables des résultats fondamentaux de la théorie des G-fonctions. La section I se situe autour du Théorème de Dwork sur l'estimation de l'invariant $\tau = \sigma - \varrho$ attaché aux modules différentiels de type G (*cf.* I, Th. 3.1). Nous généralisons au cas de plusieurs variables et d'un corps de nombres quelconque le théorème [D99, Th. 1.1], prouvé à l'origine pour un module différentiel sur $\mathbb{Q}(x)$.

La section II est vouée à la généralisation du théorème de Chudnovsky [A89, VI], qui affirme que le module différentiel engendré par une G-fonction est de type G (*cf.* II, Th. 4.1). On en déduit, grâce aux résultats de la section I, un corollaire plus parlant en vue des applications: le module différentiel engendré par une G-fonction est régulier.

Dans la deuxième partie nous introduisons les modules aux q-différences arithmétiques. Dans la section III nous établissons leurs premières propriétés et nous prouvons un théorème dans le sillage de la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures qui lie la trivialité d'une équations aux q-différences sur le corps des fonctions rationnelles à la trivialité de sa réduction, convenablement définie, modulo p, pour presque tout p (*cf.* III, Th. 7.1). Il est à noter que la conjecture originale dans le cas différentiel est encore un problème ouvert. Les techniques employées dans sa preuve sont empruntées à la théorie des G-fonctions.

La section IV contient un analogue de la caractérisation conjecturale du groupe de Galois différentiel de Katz [K82] pour les équations aux q-différences (*cf.* IV, Th. 2.2). Sa preuve repose sur les résultats de la section précédente. Nous terminons en montrant comment pour

Références.

[Ad31] Adams C.R.: Linear q-difference equations, Bull. A.M.S., 1931, 361-399.

[A89] André Y.: G-functions and Geometry, Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[A00] André Y.: Séries Gevrey de type arithmétique (II: transcendance sans transcendance), Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 741-756.

[D99] Dwork B.: "On the size of differential modules", Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 225-239.

[K82] Katz N. M.: A conjecture in the arithmetic theory of differential equations, Bull. S.M.F. 110, (1982), 203-239, and Bull. S.M.F. 111, (1982), 347-348.

[R92] Ramis J-P.: About the growth of entire functions solutions of linear q-difference equations, Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse, Série 6, Vol. I, 1 (1992), 53-94.

les équations aux q-différences cette description permet, dans certains cas, un calcul effectif et presque immédiat du groupe de Galois, contrairement au cas différentiel.

Le premier appendice est dédié aux q-analogues de la transformation de Fourier pour les équation aux q-différences et à la définition d'un polygône pour ces équations (déjà défini dans [Ad31] et [R92]), inspiré par le polygône de Newton-Ramis. Le deuxième appendice est une tentative de réponse à une question de Y. André posée dans [A00] sur la bonne définition de séries q-Gevrey arithmétiques.

Les deux appendices sont destinés à faire partie d'un travail futur sur la théorie arithmétique des séries q-Gevrey et son application à la théorie de l'irrationalité, inspirée par les résultats de [A00] sur les fonctions q-exponentielles.

Étude arithmétique

des équations aux q-différences

et

des équations différentielles

Queste parole di colore oscuro
vid'ïo scritte al sommo d'una porta;
per ch'io: "Maestro, il senso lor m'è duro".
Ed elli a me, come persona accorta:
"Qui si convien lasciare ogne sospetto;
ogne viltà convien che qui sia morta.
Noi siam venuti al loco ov'i' t'ho detto
che tu vedrai le genti dolorose
c'hanno perduto il ben de l'intelletto".
E poi che la sua mano a la mia puose
con lieto volto, ond'io mi confortai
mi mise dentro alle segrete cose.

Dante, Inf., III, 10-21.

Table des matières

Introduction

Première partie. Sur la théorie arithmétique des équations différentielles (théorie géométrique des G-fonctions)

Deuxième partie. Sur la théorie arithmétique des équations aux q-différences

Appendices

Introduction

1. Sur la théorie arithmétique des équations différentielles.

La théorie des G-fonctions forme la trame de cette thèse, sous deux avatars principaux: d'une part en tant que solutions de systèmes linéaires d'équations différentielles et leur généralisation à plusieurs variables, d'autre part dans le contexte, parallèle mais techniquement assez différent, des équations aux q-différences.

Les G-fonctions ont été introduites par Siegel en 1929 et étudiées pour les propriétés diophantiennes de leurs valeurs. C'est seulement dans les années quatre-vingt que l'attention des mathématiciens s'est tournée vers les opérateurs différentiels (dits G-opérateurs), dont les solutions sont des G-fonctions, plutôt que vers les G-fonctions elles-mêmes. Cette préoccupation commence à paraître dans les travaux de Galočkin et de Bombieri [B81]. Les travaux successifs de Chudnovsky, André, Dwork ont ultérieurement mis en évidence la nature géométrique de cette théorie. La conjecture de Bombieri-Dwork prédit:

Conjecture. *Les G-opérateurs proviennent de la géométrie (i.e. s'obtiennent à partir d'opérateur de Picard-Fuchs).*

L'approche géométrique devient incontournable lorsque l'on s'intéresse à la théorie des G-fonctions à plusieurs variables. Elle ne s'est developpée que très récemment, grâce au travail de Y. André et F. Baldassarri [AB97].

1.1. G-fonctions et modules différentiels de type G.

Sans aucune prétention d'exhaustivité, nous voulons rappeler ici quelques résultats qui motivent notre travail.

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{V}_K$ son anneau des entiers. On appelle *G-fonction* une série formelle $y=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in K[\![x]\!]$ à coefficients dans K, telle que :
1) y est "holonome", *i.e.* il existe $\mathcal{L}\in K[x,D]$ non nul qui annule y;
2) pour toute immersion $K\hookrightarrow\mathbb{C}$, la série entière y a rayon de convergence non nul, en tant que série à coefficients complexes;
3) il existe une suite de nombres entiers positifs $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une constante C réelle positive telles que $N_n a_s\in\mathcal{V}_K$ pour tout $s\leq n$ et telles que $N_n\leq C^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Une définition plus souple de G-fonction peut être donnée à l'aide de l'invariant σ, appelé *taille*. Pour le définir nous avons besoin de quelques notations: on note $|\ |_v$ la valeur absolue

v-adique de K telle que $v|p$, où p est un premier de $\mathbb{Z}$, ou une norme archimédienne de K, normalisée de façon que la Formule du Produit soit valable. Soient Σ_f l'ensemble des places finies de K et Σ_∞ l'ensemble des places infinies de K. Pour une série formelle $y = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]$, on définit la *taille de y* de la façon suivante :

$$\sigma(y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \sup_{|\underline{\alpha}|\leq n} \left(0, \log |a_{\underline{\alpha}}|_v\right) \ .$$

Nous savons (*cf.* [A89] ou [DGS94]) qu'une série formelle y vérifie les conditions 2) et 3) de la définition de G-fonction si et seulement si $\sigma(y) < \infty$.

Un autre invariant qui joue un rôle central dans la théorie est le *rayon inverse global* ϱ. En effet, pour chaque place finie ou infinie v de K, on peut considérer le rayon de convergence v-adique $r_v(y)$ de la série $y \in K[\![x]\!]$. On appelle rayon inverse global de y :

$$\varrho(y) = \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \sup \left(0, \log \frac{1}{r_v(y)}\right) \ .$$

On peut définir des invariants de la même nature pour un module différentiel défini sur $K(x)$. Pour cela nous avons besoin d'introduire la norme v-adique dite de Gauss, définie sur $K(x)$ pour toute place finie v de la façon suivante :

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} \right|_{v,Gauss} = \frac{\sup_{i=0,\ldots,n} |a_i|_v}{\sup_{j=0,\ldots,m} |b_j|_v} \ .$$

Notons D la dérivation $\frac{d}{dx}$ de $K(x)/K$. Soit (M,∇) un $K(x)$-module différentiel de rang μ, muni de la connexion $\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{K(x)} \Omega^1_{K(x)/K}$. Soit $\underline{e}$ une base de M, telle que :

$$\nabla (D)^n \,\underline{e} = \underline{e} G_n(x) \ , \text{ avec } G_0(x) = \mathbb{I}_\mu \text{ et } G_n(x) \in M_{\mu\times\mu}\left(K(x)\right) \text{ pour tout entiers } n > 0.$$

On peut alors définir la *taille de M* :

$$\sigma(M) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{v\in\Sigma_f} \sup_{s\leq n} \left(0, \log \left|\frac{G_s(x)}{s!}\right|_{v,Gauss}\right)\right) \ .$$

et le *rayon inverse global de M*:

$$\varrho(M) = \sum_{v\in\Sigma_f} \log \frac{1}{R_v(M)} \ ,$$

où :

$$R_v(M) = \inf \left(1, \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{G_n(x)}{n!}\right|_{v,Gauss}^{-1/n}\right) \ .$$

Un module différentiel (M,∇) est dit *de type G ou un G-module* s'il vérifie la *condition de Galočkin* $\sigma(M) < \infty$.

Les relations entre les invariants $\sigma(y)$, $\varrho(y)$, $\sigma(M)$ and $\varrho(M)$ ne sont pas encore complètement éclaircies : la première partie de ce travail leur est essentiellement dédiée.

Le théorème de Chudnovsky fait le lien entre $\sigma(y)$ and $\sigma(M)$. En effet si $y \in K[\![x]\!]$ est une série formelle "holonome", le $K(x)$-espace vectoriel M engendré par $(D^n y)_{n\geq 0}$ a une structure naturelle de module différentiel sur $K(x)$ de rang fini. Alors on a :

Théorème de Chudnovsky 1.1.1. (*cf.* [A89, VI]) Si y est une G-fonction, le module différentiel M est de type G.

Il faut souligner la faiblesse des hypothèses de ce dernier théorème : on se donne seulement une solution injective du module différentiel et non un système complet de solutions. L'inverse du théorème (1.1.1) est un résultat bien connu: il est une conséquence immédiate du Principe du Maximum si M est trivial en zéro; sinon c'est un théorème classique sur les G-fonctions (*cf.* [A89] ou [DGS94]). Il s'ensuit qu'il est équivalent d'affirmer qu'une solution injective d'un module différentiel sur $K(x)$ dans l'anneau des séries formelles est une G-fonction ou que le module lui-même est de type G.

L'inégalité liant $\sigma(M)$ et $\varrho(M)$ vient compléter le cadre des relations connues entre les différents invariants. Le théorème de Dwork ci dessous améliore et rend effective une estimation connue, due à Bombieri et André :

Théorème 1.1.2. (*cf.* [D99, 1.1] pour $K = \mathbb{Q}$ et [DVI] pour le cas général) *Soit Σ l'ensemble des places finies v de K telles que $|G_p(x)|_{v,Gauss} \geq 1$, où p est le nombre premier résiduel de v. On pose:*

$$\Delta(M) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma,\ v|p,\ p\leq n} \log |p|_v^{-1} \ ,$$

Alors :

$$\Delta(M) \leq \sigma(M) - \varrho(M) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\mu - 1}\right) \Delta(M) \ . \tag{1.1.2.1}$$

L'estimation (1.1.2.1) est fine, elle devient une égalité quand $\mu = 2$. D'autre part, grâce aux résultats de [K72], on peut donner une recette simple de calcul de la constante $\Delta(M)$ pour les équations hypergéométriques; ce corollaire (*cf.* [D99]) de (1.1.2), obtenu en le combinant avec les résultats de [K72], est rappelé dans l'introduction à la section I.

Le résultat (1.1.2) met en évidence la nature plus intrinsèque de l'invariant $\tau(M) = \sigma(M) - \rho(M)$ par rapport à $\sigma(M)$ et $\rho(M)$: on verra plus loin que $\tau(M)$ est profondément lié à la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures.

Enfin, si $y \in K[\![x]\!]$ est une série formelle "holonome" et M est le module différentiel engendré par y, on a:

$$\sigma(y) < \infty \Leftrightarrow \sigma(M) < \infty \Leftrightarrow \varrho(M) < \infty \Rightarrow \varrho(y) < \infty \ .$$

Le problème de l'implication $\varrho(y) < \infty \Rightarrow \varrho(M) < \infty$ est l'une des principales lacunes technique de la théorie des G-fonctions : pour quelques conséquences diophantiennes voir par example [A00-2, §3].

La juxtaposition des théorèmes (1.1.1) et (1.1.2) et du résultat suivant :

Théorème 1.1.3. (*cf.* [K70, 13.0]) *S'il existe un sous ensemble infini S des places finies de K tel que pour tout $v \in S$ on a : $R_v(M) > |p|_v^{1/(p-1)}$, avec $v|p$, alors le module différentiel (M, ∇) est régulier.*

donne le corollaire:

Corollaire 1.1.4. *Le module différentiel engendré par une G-fonction est régulier.*

C'est ce résultat qui est important dans les applications: il est par exemple à la base de de la théorie arithmétique des séries Gevrey (*cf.* [A00-1] et [A00-2]).

1.2. Théorie géométrique des G-fonctions.

Plutôt que sur $K(x)$, dans la section précédente, on aurait pu travailler avec un corps de fonctions algébriques; plus généralement les modules différentiels de type G vivent naturellement sur des variétés lisses de type fini sur un corps de nombres K. Dans la première partie de cette thèse nous nous plaçons dans ce cadre géométrique, en suivant l'exemple de Katz, André et Baldassarri.

La première partie de notre travail concerne la généralisation de (1.1.1) et de (1.1.2) au cas d'un module à connexion localement libre de rang fini sur une variété sur un corps des nombres K.

La preuve de la généralisation de (1.1.2) repose sur une généralisation du théorème de Dwork-Robba et sur le lemme suivant :

Lemme 1.2.1.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{s \leq n} \left(0, \log \left| \frac{G_n(x)}{n!} \right|_{v,Gauss} \right) = \log \frac{1}{R_v(M)} \ .$$

Les deux résultats se trouvent dans [BD]. La preuve utilise aussi la généralisation des estimations de Katz du rayon de convergence générique $R_v(M)$ basées sur la trivialité de la réduction modulo v de (M, ∇).

Nous prouvons aussi la généralisation de l'estimation suivante dûe à Dwork :

Théorème 1.2.2. *Soient (M, ∇)un module différentiel sur $K(x)$ de type G et $\underline{e}$ une base fixée de M telle que $\nabla(D^n) = \underline{e}G_n(x)$. Soit $\Sigma^{(m)}$ l'ensemble des places finies v de K telles que*

$|G_{mp}(x)|_{v,Gauss} < 1$, *mais* $|G_{(m-1)p}(x)|_{v,Gauss} = 1$. *On pose*

$$\Delta^{(m)}(M) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma^{(m)}\\ p\leq n,\ p|v}} \log |p|_v^{-1} \ ,$$

alors :

$$\sigma(M) - \varrho(M) \geq \sum_{m=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)}\right) \Delta^{(m)}(M) \ .$$

Dwork conjecture dans [D99] qu'il s'agit d'une égalité.

La preuve de la généralisation de (1.1.1) se compose, comme la preuve à une variable, d'une partie formelle et d'une partie d'estimations p-adiques. La partie formelle est basée sur la construction d'approximants de Hermite-Padé pour des séries formelles solutions d'un système différentiel à plusieurs variables. Dans la deuxième partie, on procède à des estimations en utilisant le lemme de Siegel.

Dans l'appendice de la section II, nous déduisons des résultats de [AB98] une généralisation de (1.1.3), qui nous permet d'énoncer le corollaire:

Corollaire 1.2.3. *Soit* $y \in K[\![x_1, \dots, x_d]\!]$ *une G-fonction à plusieurs variables. Alors le module différentiel de rang fini sur* $K(x_1, \dots, x_d)$ *engendré par* y *est régulier.*

Ce corollaire constitue un premier pas vers la construction d'une théorie Gevrey à plusieurs variables, à l'exemple de [A1-00] et [A2-00]. L'intérêt d'une telle théorie est dans ses applications éventuelles à la théorie de la transcendance.

L'espoir serait d'obtenir une bonne théorie pour des "fonctions Gevrey arithmétiques" qui aient un ordre Gevrey arithmétique asymétrique en les différentes variables. Cela permettrait de traiter le cas de fonctions obtenues par combinaison de l'exponentielle e^x avec des fonctions hypergéométriques, les valeurs de ces fonctions étant liées à e et π. Nous pensons, par exemple, à la formule de Ramanujan:

$$\frac{9801}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} [1103 + 26390n] \frac{(1/4)_n (1/2)_n (3/4)_n}{(1)_n (1)_n n!} \frac{1}{(99)^{4n}} \ ,$$

qui esprime π comme valeur en $\frac{1}{99}$ d'une G-fonction (*i.e.* d'une série Gevrey arithmétique d'ordre zéro).

2. Sur la théorie arithmétique des équations aux q-différences.

L'étude des équations aux q-differences a été au centre de l'intérêt des mathématiciens des siècles derniers et de la première partie du nôtre. Euler, Gauss, Jacobi, Ramanujan ont apporté leur contribution à l'étude des fonctions spéciales solutions d'équations aux q-différences.

Après quelques années d'oubli, la communauté mathématique a redécouvert ce sujet. Entre les travaux plus récents et plus proche du contenu de cette thèse, nous rappellons les travaux de Bézivin, Ramis et de Zhang sur les séries divergentes, de Etingof, van der Put et Singer, et Sauloy sur la théorie de Galois aux q-différences. Nous citons aussi le travail d'André sur les connexions non-commutatives [A00-3].

La théorie arithmétique des équations aux q-différences n'en est qu'à ses débuts et la littérature dans ce domaine n'est pas très riche.

En connexion avec le problème "Schwarzien" de la recherche de solutions algébriques, nous rappelons le théorème suivant dû a Bézivin et Boutabaa :

[BB92, 7.1] *Soient q_1 et q_2 deux éléments multiplicativement indépendants de la clôture algèbrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. Soit $y(x)$ une série formelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ solution du système :*

$$\begin{cases} a_\mu(x)y(q_1^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q_1^{\mu-1}x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0 \\ b_\mu(x)y(q_2^\mu x) + b_{\mu-1}(x)y(q_2^{\mu-1}x) + \ldots + b_0(x)y(x) = 0 \end{cases},$$

avec $a_0(x), \ldots, a_\mu(x), b_0(x), \ldots, b_\mu(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$, et $a_0(x)b_0(x) \neq 0$. Alors $y(x)$ est la série de Taylor d'une fonction rationnelle.

Dans la troisième section de cette thèse, nous affrontons un problème de nature semblable, mais les techniques utilisées sont très différentes de celles de [BB99].

L'appendice de cette thèse est très influencée par les travaux d'André [A00-1] et [A00-2], sur les q-analogues des fonctions exponentielles.

2.1. La conjecture de Grothendieck-Katz sur les p-courbures.

Regardons de plus près le théorème (1.1.2). Comme nous l'avons déjà dit, il est profondément lié à la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures:

Conjecture de Grothendieck 2.1.1. *Si $|G_p(x)|_{v,Gauss} < 1$ pour presque tout v, alors le module (M, ∇) devient trivial sur une extension finie de $K(x)$.*

Le théorème (1.1.2) éclaire la variante suivante de la conjecture de Grothendieck énoncée par Y. André dans [A97]:

Conjecture 2.1.2. *Soit (M, ∇) un module différentiel sur $K(x)$ tel que $\tau(M) = 0$. Alors (M, ∇) devient trivial sur une extension finie de $K(x)$.*

En effet l'hypothèse "$|G_p(x)|_{v,Gauss} < 1$ pour presque tout v" implique $\tau(M) = 0$, donc les "solutions" d'un module différentiel qui vérifie les hypothèses de la conjecture de Grothendieck sont des G-fonctions. On peut observer qu'il suffirait d'avoir une bonne uniformisation méromorphe des solutions de (M, ∇) pour appliquer le critère d'algébricité [A97, Th. 2.3.1] et démontrer la conjecture: cette observation est le point de départ de la troisième section de ce travail.

La conjecture de Grothendieck a été prouvée par lui-même [Ho81] pour les équations différentielles d'ordre 1 sur la droite affine et par G. and D. Chudnovsky [CC85] pour les équations différentielles sur la droite affine provenant d'équations différentielles d'ordre 1 sur des courbes de genre supérieur. Récemment, Y. André [A97] a prouvé la conjecture pour les connexions *provenant de la géométrie* et leurs déformations, généralisant des résultats de N. Katz. Le travail très récent de J-B. Bost [Bo00] est aussi étroitement lié à la conjecture de Grothendieck.

Le cas général de la conjecture de Grothendieck est encore ouvert.

La conjecture de Grothendieck est équivalente à une autre conjecture de Katz [K82], qui donne une description arithmétique du groupe de Galois générique d'un module différentiel quelconque sur $K(x)$.

On appelle *groupe de Galois (générique)* $Gal(\mathcal{M})$ du module différentiel $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ le sous-groupe algébrique de $GL(M)$, qui stabilise toute sous-connexion de toute somme finie de la forme $\oplus_{i,j}(M^{\otimes^i} \otimes_{\mathbb{Q}(x)} (M^*)^{\otimes^j})$.

On peut considérer un réseau $\widetilde{M}$ de M sur une sous-algèbre différentielle $\mathcal{A}$ de $(K(x), D)$ de type fini sur $\mathcal{V}_K$ et considérer le module $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{A}} k_v$ sur le corps résiduel k_v de $\mathcal{V}_K$ par rapport à la place finie v, pour presque tout v, muni de la connexion induite par ∇, que l'on notera encore ∇. Comme D^p est une dérivation sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{V}_K} k_v$ on peut considérer l'opérateur $\psi_p = \nabla\left(\frac{d}{dx}\right)^p$ agissant sur $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{A}} k_v$. On appelle ψ_p la p-courbure de $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{A}} k_v$. Soit $\underline{e}$ une base de $\widetilde{M}$ sur $\mathcal{A}$, telle que $\nabla(D^n)\underline{e} = \underline{e}G_n(x)$; les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $\psi_p = 0$;

2) $|G_p(x)|_{v,Gauss} < 1$;

3) la réduction dans $k_v(x)$ du système différentiel $DY = YG_1(x)$ a un système complet de solutions dans $k_v(x)$.

D'autre part $Gal(\mathcal{M}) \subset GL(M)$ et on peut définir via le choix de $\widetilde{M}$ (indépendament du choix de $\widetilde{M}$, sauf pour un nombre fini de v) sa réduction modulo v et la réduction de son algèbre de Lie $\subset End(M)$. On peut aussi donner un sens à la propriété, pour la réduction modulo v de l'algèbre de Lie $Gal(\mathcal{M})$, de contenir la p-courbure ψ_p. La conjecture de Katz affirme:

Conjecture de Katz 2.1.3. *L'algèbre de Lie de $Gal(\mathcal{M})$ est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{End}_{K(x)}(\mathcal{M})$ dont la réduction modulo v contient les p-courbures pour presque tout v.*

2.2. q-analogue de la conjecture de Grothendieck.

Dans la troisième section de ce travail, nous prouvons un analogue de la conjecture de Grothendieck sur les p-courbures pour les équations aux q-différences. Soit q un nombre rationnel non nul. On considère l'opérateur :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_q : & \mathbb{Q}(x) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(x) \\ & f(x) & \longmapsto & f(qx) \end{array}$$

et l'équation aux q-différences :

$$\mathcal{L}y = a_\mu(x)y(q^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q^{\mu-1}x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0 \ , \ a_\mu(x) \neq 0 \ ,$$

où $a_i(x) \in \mathbb{Q}(x)$. Pour presque tout nombre premier p, l'image $\overline{q}$ de q dans $\mathbb{F}_p$ est différente de zéro et engendre un sous-groupe de $\mathbb{F}_p^\times$ d'ordre κ_p. Pour presque tout p, il existe donc un entier positif ℓ_p tel que $1 - q^{\kappa_p} = p^{\ell_p}\frac{h}{g}$, avec $h, g \in \mathbb{Z}$ premiers à p, et on peut considérer la réduction $\mathcal{L}_p y = 0$ de $\mathcal{L}y = 0$ modulo p^{ℓ_p}. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{P(q^i x)}, i \geq 1\right]$, avec $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Q}(x)$, telle que $a_i(x) \in \mathcal{A}$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu$.

Notre résultat principal est le suivant (*cf.* [DVIII, (7.1.1)])(*) :

Théorème 2.2.1. *L'équation aux q-différences $\mathcal{L}y = 0$ a un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}(x)$ si et seulement si pour presque tout nombre premier p, l'équation $\mathcal{L}_p y = 0$ a un système complet de solutions dans $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Les techniques employées dans la preuve du théorème 2.2.1 sont empruntées à la théorie des G-fonctions. Le fait qu'on puisse prouver un tel énoncé dans le cas des q-différences, alors que le cas différentiel est ouvert, tient essentiellement aux propriétés suivantes :
1) Une série formelle ayant rayon de convergence non nul solution d'une équation aux q-différences a un rayon de méromorphie infini si $|q| > 1$. Comme on suppose que q est un nombre algébrique et qu'il n'est pas racine de l'unité, on peut toujours trouver une place (finie ou infinie) telle que q ait une norme plus grande que 1. Comme nous l'avons déjà souligné, c'est exactement une "bonne uniformisation méromorphe" des G-fonctions qui manque pour montrer la conjecture de Grothendieck dans le cas différentiel : pour les équations aux q-différences la "bonne uniformisation méromorphe" est acquise d'emblée.
2) Une équation différentielle arithmétique, dont la réduction modulo p se factorise en facteurs triviaux pour presque tout p, est régulière singulière à exposants rationnels (*cf.* [K70, 13.0]).

(*) Après la rédaction du présent travail, j'ai appris que J-P. Bézivin (dans "*Les suites q-récurrentes linéaires*", Compositio Mathematica 80, 285-307, 1991) a posé la conjecture :
Conjecture. *L'équation aux q-différences $\mathcal{L}y = 0$ a un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}(x)$ si et seulement si pour presque tout nombre premier p, la réduction modulo p de $\mathcal{L}$ a un système complet de solutions dans $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$.*
Dans le même papier l'auteur prouve la généralisation au cas d'un corps de nombres du résultat suivant : *Si une équation aux q-differences a un système complet de solutions dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right][\![x]\!]$, avec $n \in \mathbb{Z}$, alors il est trivial sur $\mathbb{Q}(x)$.*
Le seul point de contact entre la preuve de Bézivin et la preuve de notre résultat est l'utilisation de la théorie des formes linéaires de logarithmes, dont nous parlerons plus loin.

Une équation aux q-différences, dont la réduction modulo p se factorise en facteurs triviaux pour presque tout p, est régulière singulière et, de plus, ses "exposants" appartiennent à $q^{\mathbb{Z}}$. Si sa réduction modulo p est triviale pour presque tout p, l'équation a un système complet de solutions dans $K((x))$.

Il y a un point technique où les outils utilisés dans la théorie des G-fonctions donnent un résultat moins fort pour les équations aux q-différences: c'est l'analogue des estimations de Katz du rayon de convergence générique sous l'hypothèse de réduction nilpotente, qui ne sont pas complètement satisfaisantes (*cf.* [DVIII, §5]). Cela complique parfois notre exposé. Nous introduisons deux notions qui généralisent la notion usuelle de réduction triviale. Les deux notions sont des généralisations naturelles de la notion différentielle (*cf.* [DVIII, §1]) et les deux ont un intérêt autonome : la première nous permet d'obtenir la trivialité sur $K((x))$ et la deuxième sur $K(x)$.

Enfin, nous voulons souligner le problème suivant: nous avons un contrôle très faible sur la suite de nombres entiers $(\kappa_p)_p$ et pas de contrôle du tout de la suite $(\ell_p)_p$. Nous montrons toutefois (*cf.* [DVIII, 6.1.2]) que q est complètement déterminé par $(\kappa_p)_p$. Nous pouvons considérer ce genre de question comme la contrepartie arithmétique du problème classique (archimédien) des petits diviseurs. Cela devient plus clair si nous exprimons la définition de κ_p et ℓ_p sous forme plus analytique:

$$\kappa_p = \min\{m \in \mathbb{Z} : m > 0,\ |1 - q^m|_p < 1\}$$

et $p^{-\ell_p} = |1 - q^{\kappa_p}|_p$, où $|\ |_p$ la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$, telle que $|p|_p = p^{-1}$.

Il pourrait paraître naturel de chercher à éviter le problème (archimédien) des petits diviseurs en supposant que, pour toute immersion $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, l'image de q dans $\mathbb{C}$ n'est pas de norme complexe 1. En fait, nous n'avons pas besoin de cette hypothèse, car q est un nombre algébrique. Le seul passage où se manifeste le problème des petits diviseurs est [DVIII, (8.3)], où nous avons besoin de montrer qu'une série formelle $y(x) \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ est toujours convergente. Dans [Be92], Bézivin nous donne des conditions techniques suffisantes sur l'estimation de $|1 - q^n|_{\mathbb{C}}$ pour la convergence de y. C'est une conséquence du Théorème de Baker sur les formes linéaires de logarithmes que ces conditions sont toujours vérifiées. Nous pensons que cette technique pourrait avoir des applications au problème des petits diviseurs dans d'autres contextes.

Enfin, rappelons que dans [PS97] se trouve un contre-exemple à l'analogue naïf de la conjecture de Grothendieck pour les équations aux différence finies. Les auteurs y suggèrent un lien entre la propriété d'avoir réduction triviale pour presque tout p et les propriétés arithmétiques des solutions, mais il ne formulent pas d'énoncé précis. Il nous semble que la preuve de (2. 2.1) devrait s'appliquer partiellement au cas des équations aux différences finies et qu'il est raisonnable de conjecturer :

Conjecture. *Soit*

$$\mathcal{L}y(x) = a_\mu(x)y(x+\mu) + a_{\mu-1}(x)y(x+\mu-1) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0\ ,$$

une équations aux différences finies, avec $a_i(x) \in \mathbb{Q}(x)$ et soit $\mathcal{L}_p y(x) = 0$ sa réduction $\mathcal{L}y(x) = 0$ modulo p, existante pour presque tout premier rationnel p. Si $\mathcal{L}_p y(x) = 0$ a un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p(x)$, alors l'équation $\mathcal{L}y(x) = 0$ a un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, qui sont des G-fonctions.

2.3. q-analogue de la description de Katz du groupe de Galois.

Soit M un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}(x)$ de dimension finie muni d'un opérateur aux q-différences $\Phi_q : M \longrightarrow M$, *i.e.* d'un opérateur $\mathbb{Q}$-linéaire inversible, tel que $\Phi_q(fm) = \varphi_q(f)\Phi_q(m)$, pour tout $f \in \mathbb{Q}(x)$ et tout $m \in M$. Comme dans la théorie différentielle, nous pouvons attacher au module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Phi_q)$ un sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ de $GL(M)$, que nous appellerons groupe de Galois (générique) aux q-différences. Il s'agit du stabilisateur dans $GL(M)$ des modules aux q-différences qui sont sous-quotients de sommes finies de la forme $\oplus_{i,j}(M^{\otimes^i} \otimes_{\mathbb{Q}(x)} (M^*)^{\otimes^j})$, munis de l'opérateur induit par Φ_q.

Nous rappellons que pour presque tout premier p, on peut définir deux entiers positifs

$$\kappa_p = \min\{n \in \mathbb{Z} : n > 1,\ q^n \equiv 1 \bmod p\} \ .$$

et ℓ_p, avec

$$1 - q^{\kappa_p} = p^{\ell_p}\frac{h}{g},\ \text{avec } h, g \in \mathbb{Z} \text{ premiers à } p.$$

Nous pouvons réduire M modulo p^{ℓ_p}, en réduisant un réseau $\widetilde{M}$ de M stable par Φ_q, défini sur une $\mathbb{Z}$-algèbre "essentiellement de type fini" convenable, pour presque tout p. Le groupe algébrique $Gal(M)$ peut aussi être réduit modulo p^{ℓ_p} pour presque tout p. Le théorème principal de la quatrième section est le suivant:

Théorème 2.3.1. *Le groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(M)$, dont la réduction modulo p^{ℓ_p} contient la réduction de $\Phi_q^{\kappa_p}$ modulo p^{ℓ_p} pour presque tout p.*

Comme Φ_q est un endomorphisme φ_q-linéaire (qui est plus facile à manier que les itérés des dérivations), il peut arriver que l'on puisse calculer tous les opérateurs Φ_q^n et, donc, déterminer par voie arithmétique le groupe de Galois générique.

2.4. Séries q-Gevrey arithmétiques et polygône de Newton-Ramis.

Dans les appendices de cette thèse, nous donnons un aperçu de nos recherche plus récentes. Les deux appendices constituent le noyau d'un travail sur les séries q-Gevrey arithmétiques. Dans le premier, nous considérons deux analogues de la transformation de Fourier formelle et rappellons la défintion de polygône de Newton-Ramis pour les équations aux q-différences (*cf.* [Ad31] et [R92]). Dans le deuxième, nous posons une possible définition des séries q-Gevrey arithmétiques, en répondant à une question posée dans [A00-2]. En effet, puisque les G-fonctions solutions d'une équation aux q-différences sont des séries rationnelles, le problème se pose d'une bonne définition de qG-fonction, qui contienne les séries hypergéométriques basiques à paramètre dans $q^{\mathbb{Q}}$.

La difficulté la plus grande pour la construction d'une théorie q-Gevrey arithmétique est l'absence d'un résultat du type (1.1.1): nous pouvons, en effet, revisiter la démonstration du théorème de Chudnovsky pour les équations aux q-différences, mais les seules équations qui en vérifient les hypothèses sont les équations triviales.

D'un autre coté tout analogue raisonnable de la définition de taille pour les q-séries ne semble prendre en compte qu'une partie des places finies. Donc, nous ne disposons plus de la Formule du Produit, qui est un outil incontournable dans ce domaine. Il nous semble qu'un résultat du genre (1.1.1) pour les équations aux q-différences est profondément lié au problème de démontrer qu'une série formelle holonome ayant rayon inverse global fini est une G-fonction.

Références.

[Ad31] Adams C.R..: "Linear q-difference equations", Bull. A.M.S., 1931, 361-399.

[A89] André Y.: "*G-functions and Geometry*", Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[A97] André Y.: "Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz", Institut de Mathématiques de Jussieu, preprint 134, octobre 1997.

[A00-1] André Y.: "Séries Gevrey de type arithmétique (I: théorèmes de pureté et de dualité)", Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 705-740.

[A00-2] André Y.: "Séries Gevrey de type arithmétique (II: transcendance sans transcendance)", Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 741-756.

[A00-3] André Y.: "Différentielles non-commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences", to appear in Annals Scient. Éc. Norm. Sup..

[AB97] André Y., Baldassarri F.: "Geometric theory of G-functions", in *Arithmetic Geometry*, F. Catanese Ed., Symp. Math. XXXVII, Cambridge Univ. Press, 1997.

[AB98] André Y., Baldassarri F.: "*De Rham Cohomology of Differential Modules on Algebraic Varieties*", Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 184, Septembre 1998.

[BD] Baldassarri F., Di Vizio L.: "Continuity of the local radius of convergence for a connection over a Berkovich analytic space", in preparation.

[Be92] Bézivin J.P.: "Sur les équations fonctionnelles aux q-différences", Aequationes math. 43, (1992).

[BB92] Bézivin J.P., Boutabaa A.: "Sur les équations fonctionnelles p-adique aux q-différences", Collect. Math. 43, 2 (1992).

[B81] Bombieri E.: "On G-functions", in *Recent progress in Analityc Number Theory*, vol.2, Academic Press, New York, 1981, 1-67.

[Bo00] Bost J.B.: "Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields", Université d'Orsay, preprint 2000-60.

[CC85] Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V.: "Application of Padé approximation to diophantine inequalities in value of G-functions", Lect.Notes in Math. 1052, Springer-Verlag, 1985, 1-51.

[DVI] Di Vizio L.: "On the arithmetic size of linear differential equations", à paraître dans Journal of Algebra (Section I).

[DVII] Di Vizio L.: "Sur la théorie géométrique des G-fonctions (Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables)", à paraître dans Mathematiche Annalen (Section II).

[DVIII] Di Vizio L.: "Arithmetic theory of q-difference equations I. The q-analogue of Grothendieck's conjecture on p-curvatures", (Section III).

[DVIV] Di Vizio L.: "Arithmetic theory of q-difference equations II. The q-analogue of Katz's conjectural description of differential Galois groups", (Section IV).

[D99] Dwork B.: "On the size of differential modules", Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 225-239.

[DGS94] Dwork B., Gerotto G., Sullivan F.: "*An Introduction to* G-*functions*", Annals of Mathematical Studies 133, Princeton University Press, Princeton N.J., 1994.

[E95] Etingof P. I.: "Galois groups and connection matrices of q-difference equations", Electronic Research Announcements of the A.M.S., Vol. I (1),1995.

[H96] Hendriks P. A.: "Algebraic Aspects of Linear Differential and Difference Equations", Ph. D. thesis, University of Groningen, 1996.

[Ho81] Honda T.: "Algebraic differential equations", I.N.D.A.M. Symp. Math. XXIV (1981), 169-204.

[K70] Katz N. M.: "Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin", Publ. Math. IHES 39 (1970), 175-232.

[K72] Katz N. M.: "Algebraic solution of differential equations (p-curvature and Hodge Filtration)", Invent. Math. 18, (1972), 1-118.

[K82] Katz N. M.: "A conjecture in the arithmetic theory of differential equations", Bull. S.M.F. 110, (1982), 203-239, and Bull. S.M.F. 111, (1982), 347-348.

[K87] Katz N. M.: "On the calculation of some differential Galois groups", Invent. math. 87, 13-61 (1987).

[MZ98] Marotte F., Zhang C.: "Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique", preprint 1998.

[PS97] van der Put M., Singer M. F.: "*Galois Theory of Difference Equations*", Lecture Notes in Mathematics 1666, Springer, 1997.

[R92] Ramis J-P.: "About the growth of entire functions solutions of linear q-difference equations", Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse, Série 6, Vol. I, 1 (1992), 53-94.

[S99] Sauloy J.: "*Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes*", Thèse doctorale de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, 1999.

[Z99] Zhang C.: "Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables", Ann. Inst. Fourier, Grenoble 49,1 (1999), 227-261.