Première partie.

Sur la théorie arithmétique des équations différentielles (théorie géométrique des G-fonctions)

Section I.
On the arithmetic size of linear differential equations

Introduction.

The notion of G-function was first introduced by C. L. Siegel in 1929. Later work of Bombieri, Chudnovsky, André, Dwork clarified the geometric content of that (one variable) notion, as a solution of a special type of linear differential operator (*of arithmetic type* or *G-operator*). A geometric theory of G-functions was established in full generality by André and Baldassarri in [AB].

We recall (a variation of) the classical definition. Let K be a number field and let $\mathcal{V}_K$ be its ring of integers. A *G-function at the origin defined over K* is a formal power series

$$y(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} A_j x^j \in K[\![x]\!] \ ,$$

such that:
1) $Ly = 0$ for some non zero $L \in K(x)\left[\frac{d}{dx}\right]$;
2) for each embedding $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, the formal power series $\sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma(A_j)x^j \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ has a positive radius of convergence;
3) there exists a sequence of positive integers $\{c_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ such that $c_s A_j \in \mathcal{V}_K$ for all $j \leq s$ and

$$\sup_{s\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{s} \log c_s \lneqq \infty \ .$$

A first non-trivial example of a G-function is the hypergeometric series

$${}_2F_1(a,b,c;x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j j!} x^j \ ,$$

where $a,b,c \in \mathbb{Q}$ and $(a)_j = a(a+1)\cdots(a+j-1)$. The vector

$$((c-b)_2F_1(a,b,c+1;x), c_2F_1(a,b,c;x))$$

is a solution of the differential system

$$(E_{a,b,c}) \qquad \frac{dY}{dx} = YE_{a,b,c}, \quad \text{with } E_{a,b,c} = \begin{pmatrix} \frac{-c}{x} & \frac{c-a}{1-x} \\ \frac{c-b}{x} & \frac{a+b-c}{1-x} \end{pmatrix} \ .$$

The general definitions on G-connections will be recalled in §2. Of great importance in their study is the finite invariant $\tau = \sigma - \rho$. In the hypergeometric case $\tau(E_{a,b,c}) = \sigma(E_{a,b,c}) - \varrho(E_{a,b,c})$ has been calculated by B. Dwork [D, Cor. 1.2] as

$$\tau(E_{a,b,c}) = 1 - \frac{\eta}{\Phi(N)} .$$

Here N is the least common denominator of a, b and c; $0 \leq A, B \lneqq N$ and $0 \lneqq C \leq N$ are positive integers such that $\left(\frac{A}{N}, \frac{B}{N}, \frac{C}{N}\right) \equiv (a,b,c) \bmod N$; η is the cardinality of the set of all $w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ such that, if $(A^{(w)}, B^{(w)}, C^{(w)}) \equiv (wA, wB, wC) \bmod N$ and $0 \leq A^{(w)}, B^{(w)} \lneqq N$, $0 \lneqq C^{(w)} \leq N$, we have $A^{(w)} \geq C^{(w)} \gneqq B^{(w)}$ or $B^{(w)} \geq C^{(w)} \gneqq A^{(w)}$; Φ is the Euler function.

The principal theme of this paper is the generalization to connections on arithmetic varieties of the main result [D, Th. 1.1] in the above mentioned paper by Dwork. Naturally, we use the geometric language introduced in [AB]. Our result provides a precise estimate for the invariant $\tau = \sigma - \rho$ of an arithmetic differential equation. This invariant, depending only on the geometric generic fiber of the connection, is highly significant. A consequence of our result is that for a differential equation having $\tau = 0$ is equivalent to having zero p-curvature for a set primes p of Dirichlet density 1. Indeed, this is expected to imply that the p-curvature is zero for all but a finite set of primes. The Grothendieck conjecture predicts that $\tau = 0$ should imply that the geometric generic fiber of the connection is trivial.

We also prove a result on the relation between generic v-adic radius of convergence and order of nilpotence of the reduced equation extending [DGS, III.5.1].

In the appendix, we prove a generalization of the Eisenstein theorem.

Acknowledgments. We are indebted to the late Professor Dwork for suggesting that we extend the main result of [D] to general G-modules of [AB]. We are also indebted to F. Baldassarri for his help in the preparation of the manuscript and to Y. André and G. Christol for their numerous remarks and suggestions.

1. Basic definitions and statement of the main results.

1.1. Let K be a number field and $\mathcal{V}_K$ be its ring of integers. We consider a non-empty open subscheme $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{V}_S)$ of $\mathrm{Spec}(\mathcal{V}_K)$. We set

$$\Sigma_S = \{\text{finite places of } K \text{ having center on } \mathcal{V}_S\} = \{\text{closed points of } S\} .$$

For each $v \in \Sigma_S$ we denote:
$|\ |_v$= the absolute value of K associated to v, normalized as follows:

$$|p|_v = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]}, \text{ if } v|p ;$$

K_v= v-completion of K;

$\mathcal{V}_v$= ring of integers of K_v;
$k(v)$= residue field of K_v of characteristic $p = p(v)$;
π_v= a uniformizer of $\mathcal{V}_v$.

Moreover, for all $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ we set $|\underline{\alpha}|_\infty = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\underline{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ and

$$\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} = \prod_{i=0}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \ , \text{ for all } \underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d, \text{ such that } \beta_i \leq \alpha_i \text{ for all } i = 1, \dots, d.$$

We denote by $\underline{1}_i$ the element of $\mathbb{N}^d$ having all its entries equal to zero except the i-th one equal to 1.

1.2. Let $\mathcal{F}$ be a function field over K; a *smooth S-model of $\mathcal{F}/K$* is a smooth S-scheme $f : X \longrightarrow S$ of finite type with geometrically connected non-empty fibers such that the field of rational functions of $X_K = X \times \mathrm{Spec}(K)$ is $\mathcal{F}$.

The choice of an S-model of $\mathcal{F}$ privileges, for each $v \in \Sigma_S$, one extension $| \ |_{X,v}$ of $| \ |_v$ to $\mathcal{F}$. In fact, let η_v denote the generic point of the closed fiber $X_{k(v)} = X \times_S \mathrm{Spec}(k(v))$, the local ring $\mathcal{O}_{X,\eta_v}$ is a discrete valuation ring, since it is a local regular domain of dimension one with uniformizer π_v. So we define $| \ |_{X,v}$ as the unique extension of $| \ |_v$ to a non archimedean absolute value of $\mathcal{F}$, such that

$$\mathcal{O}_{X,\eta_v} = \{x \in \mathcal{F} : \ |x|_{X,v} \leq 1\} \ ,$$

normalized so to extend $| \ |_v$.

Let (M, ∇) be a $\mathcal{F}/K$-differential module of finite rank μ (*i.e.* $M \cong \mathcal{F}^\mu$) and let

$$\nabla : M \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{F}/K} \otimes M$$

be its integrable connection. A *model of* (M, ∇) *on* X/S is a locally free $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ of rank μ with an integrable connection

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \otimes \mathcal{M} \ ,$$

such that $(\mathcal{M}, \nabla)_{\eta_X} = (M, \nabla)$, where η_X is the generic point of X.

We define the *generic*

v-adic radius of convergence $R_{X,v}(M)$ of (M, ∇) *on* X/S as follows. We consider an étale coordinate neighborhood $(U, \underline{x})$, with $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$, of η_v in X and a local basis $\underline{e} = (e_1, \dots, e_\mu)$ of $\mathcal{M}$ in a neighborhood of the generic point of X. Let

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \text{ for any } i = 1, \dots, d.$$

For any $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ we set

$$\underline{D}^{[\underline{\alpha}]} = \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{D}^{\underline{\alpha}} = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\alpha_i!} D_i^{\alpha_i} \ ,$$

$$\nabla\left(\underline{D}^{[\underline{\alpha}]}\right) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\alpha_i!} \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i} ,$$

and

(1.2.1) $$\nabla\left(\underline{D}^{[\underline{\alpha}]}\right) \underline{e} = \underline{e}\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}, \text{ with } \mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]} \in M_{\mu\times\mu}(\mathcal{F}) \text{ and } \mathcal{G}_{[\underline{0}]} = I_\mu .$$

Then

(1.2.2) $$R_{X,v}(M) = \left(\max\left(1, \limsup_{|\underline{\alpha}|_\infty\to\infty} |\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v}{}^{1/|\underline{\alpha}|_\infty}\right)\right)^{-1} .$$

We define the *global inverse radius of* (M,∇) *on* X/S as

(1.2.3) $$\varrho_{X/S}(M) = \sum_{v\in\Sigma_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} \in [0,+\infty] .$$

We say that (M,∇) is of *type* G or is a G-*module* if $\varrho_{X/S}(M) \lneqq \infty$, for one choice (hence for all) of S, of the S-model X and of $(\mathcal{M},\nabla)$.

A few questions on the dependence of $R_{X,v}(M)$ and $\varrho_{X/S}(M)$ on the choice of the model X/S, of $(\mathcal{M},\nabla)$, of the étale coordinates $\underline{x}$ and of the basis $\underline{e}$ naturally arise at this moment: we will come back to this problem in proposition 2.9.

1.3. An easy fact to show (*cf.* §3 below) is that, if (M,∇) admits a model on X/S, we have for each $v\in\Sigma_S$

$$R_{X,v}(M) \geq |p|_v^{1/(p-1)} .$$

We obtain a better estimate for $R_{X,v}(M)$ by looking at the properties of the differential module induced by $(\mathcal{M},\nabla)$ on the closed fiber of X over v:

1.4. Let k be a field of characteristic $p \gneqq 0$ and X_k a smooth k-scheme of finite type. Let $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ be an integrable X_k/k-connection. We recall that $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ is said to be *nilpotent of exponent* $\leq n$ if, given étale coordinates $(x_1,\ldots,x_d)$ on X_k, one has:

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{pw_1} \cdots \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{pw_d} = 0 ,$$

for all $(w_1,\ldots,w_d)\in\mathbb{N}^d$, such that $|w|_\infty = n$. If $n=1$, we say that $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ has p-*curvature* 0.

The following proposition (*cf.* §3 below for the proof) is the generalisation to the several variable case of a classical estimate (*cf.* [DGS, page 96]):

Proposition 1.5. *Let* X/S *be a smooth* S*-model of* $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M},\nabla)$ *an* X/S*-connection as before and* $v\in\Sigma_S$*; then the integrable connection* $(\mathcal{M}_{k(v)},\nabla_{k(v)})$ *induced on the closed fiber of* X *over* v *is nilpotent if and only if* $R_{X,v}(M) \gneqq |p(v)|_v^{1/(p(v)-1)}$.

Apart from $\varrho_{X/S}(M)$, one can define another invariant $\sigma_{X/S}(M)$, attached to an $\mathcal{F}/K$-differential module. We define $\sigma_{X/S}(M)$, called the size, as follows:

1.6. Let $f: X \longrightarrow S$ and $(\mathcal{M}, \nabla)$ be defined as in (1.2). Let $\mathcal{I}$ be the kernel of the map $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$, induced by mulptiplication. Then for any $n \geq 0$ one defines $\mathcal{P}^n_{X/S} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+1}$ (*cf.* [BO, §2]).

Since X/S is a smooth S-model, it is possible to give an explicit description of $\mathcal{P}^n_{X/S}$ (*cf.* [BO, 2.2]). Let $(x_1, \ldots, x_d)$ be local étale coordinates on X, $\xi_i = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i \in \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$, for $i = 1, \ldots, d$, and $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Then, for any $n \geq 1$, $\mathcal{P}^n_{X/S}$ is the $\mathcal{O}_X$-module generated by $\{\underline{\xi}^{\underline{\alpha}} = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d} : \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d, |\underline{\alpha}|_\infty \leq n\}$.

We notice that $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$ has a left (resp. right) $\mathcal{O}_X$-module structure defined by the map $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$, $a \longmapsto a \otimes 1$ (resp. $a \longmapsto 1 \otimes a$). Then $\mathcal{P}^n_{X/S}$ has a left and a right $\mathcal{O}_X$-module structure induced by the $\mathcal{O}_X$-module structures of $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$.

We consider the *induced stratification data* [BO, 2.11] associated to $(\mathcal{M}, \nabla)$

$$\Theta^{(n)} : \mathcal{M} \longrightarrow \left(\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}\right) \otimes_{\mathcal{V}_S} K \ , \tag{1.6.1}$$

which are linear morphisms with respect to the left $\mathcal{O}_X$-module structure, while the tensor product $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ is taken with respect to the right one. These are truncated Taylor expansions of solutions of $(\mathcal{M}, \nabla)$ at the generic point

$$\underline{e} \longmapsto \sum_{|\underline{\alpha}|_\infty \leq n} \underline{\xi}^{\underline{\alpha}} \otimes \underline{e}\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]} \ , \tag{1.6.2}$$

where $\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}$ are defined as in (1.2.1).

We consider the ideal $I^{(n)}$ of $\mathcal{V}_S$

$$I^{(n)} = \left\{a \in \mathcal{V}_S : \ a\Theta_n(\mathcal{M}) \subset \mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}\right\} \ . \tag{1.6.3}$$

We notice that $I^{(n)} \neq 0$ and $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$. We set

$$h_{X/S}(\mathcal{M}, n) = \frac{\log N(I^{(n)})}{[K : \mathbb{Q}]} \ , \ \text{where } N(I^{(n)}) = \#\left(\mathcal{V}_S / I^{(n)}\right). \tag{1.6.4}$$

The *size* of $(\mathcal{M}, \nabla)$ on X/S is defined as

$$\sigma_{X/S}(M) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} h_{X/S}(\mathcal{M}, n) \in [0, +\infty] \ . \tag{1.6.5}$$

If we set $I^{(n)}\mathcal{V}_v = c_{v,n}\mathcal{V}_v$, with $c_{v,n} \in \mathcal{V}_v$, and

$$h_X(\mathcal{M}, n, v) = \log |c_{v,n}^{-1}|_v = \sup_{|\underline{\alpha}|_\infty \leq n} \log |\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \ , \tag{1.6.6}$$

then we have:

Proposition 1.7.

$$h_{X/S}(\mathcal{M},n) = \sum_{v\in\Sigma_S} h_X(\mathcal{M},n,v) \ . \tag{1.7.1}$$

Proof. We have

$$\#\left(\mathcal{V}_S/I^{(n)}\right) = \prod_{v\in\Sigma_S} \#\left(\mathcal{V}_v/c_{n,v}\mathcal{V}_v\right) \ ,$$

with $\mathcal{V}_v/c_{n,v}\mathcal{V}_v = 0$, for almost all $v \in \Sigma_S$. Since

$$\#\left(\mathcal{V}_v/I^{(n)}\mathcal{V}_v\right) = \#\left(\mathcal{V}_v/c_{v,n}\mathcal{V}_v\right) = \#\left(k(v)\right)^{v(c_{n,v})} = |c_{n,v}|_{X,v}^{-[K:\mathbb{Q}]} \ ,$$

we conclude. ■

For further reference we state the following proposition. It is a generalization of a useful result of André [A, IV §5]. The original proof of André rests on the Dwork-Robba Theorem and on some calculation deriving from the Leibniz formula. There are two proof of the several variables case: the first one, in [B], is based purely on the the theory of spectral norms and on the Leibniz formula, while the second one, in [BD], is based on the generalization of the Dwork-Robba Theorem, and gives more generally continuity of the radius of convergence at points of a Berkovich analytic space.

Proposition 1.8. *With the above notation, we have*

$$\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) \ . \tag{1.8.1}$$

For lack of references we give a sketch of the proof:

Sketch of the proof of (1.8). By definition of $R_{X,v}(M)$, for all $\varepsilon > 0$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ such that $|\underline{\alpha}|_\infty \geq n_0$ we have

$$\frac{1}{|\underline{\alpha}|_\infty}\log\left|G_{[\underline{\alpha}]}\right|_{X,v} \leq \log\frac{1}{R_{X,v}(M)} + \varepsilon \ .$$

It follows that for all $n \geq n_0$ and all $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ such that $|\underline{\alpha}|_\infty \leq n$ we obtain

$$\frac{1}{|\underline{\alpha}|_\infty}\log\left|G_{[\underline{\alpha}]}\right|_{X,v} \leq \frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) \leq \frac{1}{n}\sup\left(h_X(\mathcal{M},n_0,v), \log\frac{1}{R_{X,v}(M)} + \varepsilon\right)$$

and hence

$$\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) \ .$$

Let us prove that

$$\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) \ .$$

Let $\{\underline{\beta}^{(j)} : j = 1, \dots, N\}$ be the set of all $\underline{\beta} \in \mathbb{N}^d$ such that $|\underline{\beta}|_\infty = n$, for a fix $n \in \mathbb{N}$. Let $\underline{k} \in \mathbb{N}^N$ and $\tau = \sum_{j=1}^N k_j$. Then by induction on $\#\{k_j : k_j \neq 0\}$, using the Leibniz formula we can prove (*cf.* [BD]) that for $|\underline{\alpha}|_\infty \lneqq n$ we have

$$\sup\left(0, \log\left|\mathcal{G}_{\left[\underline{\alpha}+\sum_{j=1,\dots,N} k_j\underline{\beta}^{(j)}\right]}\right|_{X,v}\right) \leq (\tau+1)h_X(\mathcal{M},n,v) + Cd(N+1)\log(\tau+1) + Cd(\tau+N)\log(pn)\ , \tag{1.8.2}$$

where C is a constant defined by $|p|_v = p^{-C}$. For all $\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^d$ such that $|\underline{\gamma}|_\infty \gneqq n$ we write $\underline{\gamma}$ in the form $\underline{\gamma} = \underline{\alpha} + \sum_{j=1}^N k_j \underline{\beta}^{(j)}$, with $\underline{k} \in \mathbb{N}^N$ and $|\underline{\alpha}|_\infty \lneqq n$. We take $\tau = \sum_{j=1}^N k_j = \left[\frac{|\underline{\gamma}|_\infty}{n}\right]$. By (1.8.2) we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\underline{\gamma}|_\infty}\sup\left(1, \log|\mathcal{G}_{[\underline{\gamma}]}|_{X,v}\right) &\leq \left(\frac{1}{|\underline{\gamma}|_\infty} + \frac{1}{n}\right)h_X(\mathcal{M},n,v) \\ &+ \frac{Cd}{|\underline{\gamma}|_\infty}(N+1)\log\left(\frac{|\underline{\gamma}|_\infty}{n} + 1\right) + Cd\left(\frac{N}{|\underline{\gamma}|_\infty} + \frac{1}{n}\right)\log(pn)\ .\end{aligned}$$

Taking the limit for $|\underline{\gamma}|_\infty$ we obtain

$$\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} \leq \frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) + \frac{Cd}{n}\log(pn)\ ,$$

and hence

$$\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} \leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v).$$

This achieves the proof. ∎

Proposition 1.9. *The generic radius of convergence $R_{X,v}(M)$ only depends on the generic fiber (M,∇) of $(\mathcal{M},\nabla)$, in particular it is independent of the choice of the local basis $\underline{e}$ of $\mathcal{M}$ on X and of the étale coordinates $\underline{x}$ of X. The same therefore holds for $\varrho_{X/S}(M)$ (which, of course, depends of the choice of S and of the S-model X).*

The size $\sigma_{X/S}(M)$ is independent of the particular X/S-model $(\mathcal{M},\nabla)$ of (M,∇).

Proof. The independence of the generic radius of convergence of the choice of the étale coordinates follows from (1.6.3), (1.6.6) and (1.8.1), since the definition of $\Theta^{(n)}$ is independent of $\underline{x}$ and $\underline{e}$ (*cf.* [BO]).

We notice that two X/S-models $(\mathcal{M},\nabla)$ and $(\mathcal{M}',\nabla')$ are isomorphic on an open subscheme of X containing η_v. The fact that the generic radius of convergence $R_{X,v}(M)$ only depends on the generic fiber (M,∇) of $(\mathcal{M},\nabla)$ follows from this remark, (1.6.6) and (1.8.1). Obviously, the same is true for $\varrho_{X/S}(M)$.

We now show that $\sigma_{X/S}(M)$ is independent of the particular X/S-model $(\mathcal{M},\nabla)$ of (M,∇). Let $(\mathcal{M}',\nabla')$ be another X/S-model. Then $(\mathcal{M},\nabla)$ and $(\mathcal{M}',\nabla')$ are isomorphic on an open subscheme of X. By (1.6.6), this means that there exists a finite subset $\{v_1,\dots,v_r\}$ of

Σ_S such that $h_X(\mathcal{M},n,v) = h_X(\mathcal{M}',n,v)$ for any $v \in \Sigma_S \smallsetminus \{v_1,\dots,v_r\}$. Then (1.8.1) implies that

$$\begin{aligned}\sigma_{X/S}(M) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_S} h_X(\mathcal{M},n,v)\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_S\smallsetminus\{v_1,\dots,v_r\}} h_X(\mathcal{M}',n,v) + \sum_{v\in\{v_1,\dots,v_r\}} \log\frac{1}{R_{X,v_i}(M)}\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_S} h_X(\mathcal{M}',n,v)\ .\end{aligned}$$

This proves our assertion. ■

The following theorem, which is our main result, was recently proved in the one variable case by Dwork [D]. It refines a formula of Bombieri-André [A, IV.5]. The proof will be given in §4.

Main theorem 1.10. Let (M,∇) be a differential $\mathcal{F}/K$-module of type G and of rank μ; and let $(\mathcal{M},\nabla)$ be a model of (M,∇) over a smooth S-model X of $\mathcal{F}/K$. If Σ'_S is the subset of Σ_S of all primes v such that the induced connection $(\mathcal{M}_{k(v)},\nabla_{k(v)})$ on the closed fiber $X_{k(v)}$ does *not* have p-curvature 0 and

$$\Delta(M) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma'_S\\ p(v)\le n}} \log|p(v)|_v^{-1}\ , \tag{1.10.1}$$

then:

$$\Delta(M) \le \sigma_{X/S}(M) - \varrho_{X/S}(M) \le \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\mu-1}\right)\Delta(M)\ . \tag{1.10.2}$$

A consequence of the previous theorem is that one may equivalently define G-connections by the boundness of size rather than of global inverse radius.

Remark 1.11. We would like to stress the intrinsic nature of the last statement, in particular:

1) While the global inverse radius of convergence $\varrho_{X/S}(M)$ and the size $\sigma_{X/S}(M)$ depend on the choice of the scheme S and of the smooth S-model X (but *not* on the particular choice of the X/S-model $(\mathcal{M},\nabla)$ of (M,∇)), *their difference $\sigma_{X/S}(M) - \varrho_{X/S}(M)$ only depends on the geometric generic fiber of the differential module $(\mathcal{M},\nabla)$.* In fact, if X/S is a smooth model of the function field $\mathcal{F}/K$, then for any open dense subscheme T of S, $X_T = X\times_S T$ is an open subscheme of X and a smooth T-model. Then we recall the definition of the invariant $\tau(M)$:

$$\tau(M) = \inf_{T\hookrightarrow S} \sigma_{X_T/T}(M)\ .$$

Since $\Sigma_S \setminus \Sigma_T$ is finite, by (1.8) we have

$$\begin{aligned}\sigma_{X_T/T}(M) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_T} h_X(\mathcal{M},n,v) \\ &= \sigma_{X/S}(M) - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_S\setminus\Sigma_T} h_X(\mathcal{M},n,v) \\ &= \sigma_{X/S}(M) - \sum_{v\in\Sigma_S\setminus\Sigma_T} \log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ .\end{aligned}$$

When we take the infimum both on the left and on the right side, we obtain

$$\sigma_{X/S}(M) - \varrho_{X/S}(M) = \inf_{T\hookrightarrow S} \sigma_{X_T/T}(M) = \tau(M)\ .$$

On the other hand, if we pick two smooth models X/S and X'/S' of the function field $\mathcal{F}/K$, then, replacing X (resp. X') by an open dense subscheme, we may assume that $S = S'$. Two smooth S-models X and X' are generically isomorphic (since the local rings at their generic points are isomorphic), therefore

$$\inf_{T\hookrightarrow S} \sigma_{X_T/T}(M) = \inf_{T\hookrightarrow S} \sigma_{X'_T/T}(M)\ .$$

So $\tau(M) = \sigma_{X/S}(M) - \varrho_{X/S}(M)$ only depends on the $\mathcal{F}/K$-differential module (M,∇).

Now let $\mathcal{F}'$ be a finite extension of $\mathcal{F}$ and K' be the algebraic closure of K in $\mathcal{F}'$. Let S' be the normalization of S in K'. By replacing X by an open submodel, we can suppose that $X' = X \times_S S'$ is smooth over S' and hence that it is an S'-model of the compositum $K'\mathcal{F} = \mathcal{G} \subset \mathcal{F}'$. By our normalization,

$$\sigma_{X/S}(M) = \sigma_{X'/S'}(M_{\mathcal{G}}) \text{ and } \varrho_{X/S}(M) = \varrho_{X'/S'}(M_{\mathcal{G}}).$$

Assume now that $K' = K$, $S' = S$. Then $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, and we can find an S-model X' of $\mathcal{F}'/K$ and an étale covering $\varphi : X' \longrightarrow X$. We note that $\sigma_{X/S}(M) = \sigma_{X'/S}(M)$ and $\varrho_{X/S}(M) = \varrho_{X'/S}(M)$ also in this case (*cf.* Appendix).

This shows that $\tau(M)$ depends only on the generic geometric fiber of $(\mathcal{M},\nabla)$.

2) First of all we notice that the constant $\Delta(M)$ appearing in the statement of last the theorem is finite by the Prime Numbers Theorem. Moreover $\Delta(M)$ is independent of the choice of the smooth model X/S and of the choice of S. In fact, let X'/S' be another model of the function field $\mathcal{F}/K$, then there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\{v \in \Sigma_S :\ p(v) \geq N\} = \{v \in \Sigma_{S'} :\ p(v) \geq N\}\ ,$$

and hence that

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma_S\\ p(v)\leq n}} \log p(v) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma_{S'}\\ p(v)\leq n}} \log p(v)\ .$$

2. Generic radius of convergence and nilpotence.

In this section we prove (1.5), which is essentially a result of local type, therefore we are going to introduce some notation, slightly different from that in §1.

Notation 2.1. We consider a number field K equipped with an ultrametric absolute value $|\ |$ such that $|p| \lneqq 1$, for a rational prime p. Let v be the valuation of K associated to $|\ |$, $\mathcal{V}$ the discrete valuation ring of K associated to v, π the uniformizer of $\mathcal{V}$, k the residue field $\mathcal{V}$ of characteristic p, X a smooth $\mathcal{V}$-scheme of finite type, with non empty geometrically connected fibers, X_k the closed fiber of X, $\mathcal{F} = \kappa(X)$ the field of rational functions on X, $|\ |_X$ the extension of $|\ |$ to $\mathcal{F}$ associated to X, normalized so to extend $|\ |$, *i.e.* such that

$$|p| = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]} .$$

Following §1, if (M,∇) is an $\mathcal{F}/K$-differential module admitting a model $(\mathcal{M},\nabla)$ on X, we define as usual

$$\nabla\left(\underline{D}^{[\underline{\alpha}]}\right)\underline{e} = \underline{e}\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]},\ \text{with } \mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]} \in M_{\mu\times\mu}(\mathcal{F}) \ , \tag{2.1.1}$$

and

$$\nabla\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}\right)\underline{e} = \underline{e}\mathcal{G}_{\underline{\alpha}},\ \left(\ \mathcal{G}_{\underline{\alpha}} = \underline{\alpha}!\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}\ \right) ,$$

where $(U, \underline{x} = (x_1,\dots,x_d))$ is an étale coordinate neighborhood of the generic point of X_k, $\underline{e}$ is a local basis of $(\mathcal{M},\nabla)$ and $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$. We have

$$\mathcal{G}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = D_i\mathcal{G}_{\underline{\alpha}} + \mathcal{G}_{\underline{1}_i}\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\ ,\ \text{for all } i = 1,\dots,d \text{ and } \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d. \tag{2.1.2}$$

We set, as in the previous section,

$$R_X(M) = \left(\max\left(1, \limsup_{|\underline{\alpha}|_\infty\to\infty} |\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_X{}^{1/|\underline{\alpha}|_\infty}\right)\right)^{-1} . \tag{2.1.3}$$

We will denote by $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ the integrable connection induced on X_k.

Lemma 2.2. *If (M,∇) has a model $(\mathcal{M},\nabla)$ on X, then*

$$R_X(M) \geq |p|^{1/(p-1)} .$$

Proof. Since $|\underline{\alpha}!| \geq |p|^{\frac{|\underline{\alpha}|_\infty}{p-1}}$, by (2.1.2) we obtain

$$R_X(M) \geq \frac{|p|^{1/(p-1)}}{\max(1, |\mathcal{G}_{\underline{1}_1}|_X,\dots,|\mathcal{G}_{\underline{1}_d}|_X)} .$$

If $(\mathcal{M},\nabla)$ is a model of (M,∇) on X, there exists an étale coordinate neighborhood $(U,\underline{x})$ such that $\mathcal{M}$ is free over U and $\mathcal{G}_{\underline{1}_i}\in M_{\mu\times\mu}(\mathcal{O}(U))$, therefore

$$|\mathcal{G}_{\underline{1}_i}|_X \leq 1 \quad .$$

So we conclude that

$$R_X(M)\geq |p|^{1/(p-1)} \quad .$$

■

If $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ is nilpotent of exponent $\leq n$, we give a lower bound for $R_X(M)$:

Proposition 2.3. *Let (M,∇) be a $\mathcal{F}/K$-connection as in (2.1); then $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ is nilpotent if and only if the following condition is satisfied:*

$$R_X(M)\gneqq |p|^{1/(p-1)} \ .$$

In particular, if $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ is nilpotent of exponent $\leq n$ we have:

$$R_X(M)\geq |\pi|^{-1/pn}|p|^{1/(p-1)} \ .$$

First we need a technical lemma.

Lemma 2.4. *If $(\mathcal{M}_k,\nabla_k)$ is nilpotent of exponent $\leq n$ and if $\{\underline{w}^{(i)} : i=1,\dots,N\}$ is the set of all $\underline{w}\in\mathbb{N}^d$ such that $|\underline{w}|_\infty = n$, we have*

$$\left|\mathcal{G}_{\sum_{i=1}^N s_i p\underline{w}^{(i)}}\right|_X \leq |\pi|^{\sum_{i=1}^N s_i} \ .$$

Proof. For all $(w_1,\dots,w_d)\in\mathbb{N}^d$, such that $|\underline{w}|_\infty = n$, we have $|\mathcal{G}_{p\underline{w}}|_X\leq|\pi|\lneqq 1$. We want to prove by induction on $s\in\mathbb{N}^*$ that for all $\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d$ we have

$$\left|\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right|_X \leq |\pi|^s\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X \lneqq 1 \ . \tag{2.4.1}$$

By Leibniz formula, we obtain

$$\begin{aligned}\nabla\left(\underline{D}^{p(s+1)\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\underline{e} &= \nabla\left(\underline{D}^{p\underline{w}}\right)\left(\underline{e}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\\ &= \underline{e}\sum_{\underline{0}\leq\underline{\beta}\leq p\underline{w}}\binom{p\underline{w}}{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{p(s+1)\underline{w}+\underline{\alpha}} &= \sum_{\underline{0}\leq\underline{\beta}\leq p\underline{w}}\binom{p\underline{w}}{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\\ &= \sum_{\underline{0}\leq\underline{\beta}\leq\underline{w}}\binom{p\underline{w}}{p\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-p\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^{p\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)+\sum_{\substack{\underline{0}\lneqq\underline{\beta}\leq p\underline{w}\\(p,\underline{\beta})=1}}\binom{p\underline{w}}{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right) \ ,\end{aligned}$$

where $(p,\underline{\beta})$ is the ideal generated in $\mathbb{Z}$ by $\{p,\beta_1,\ldots,\beta_d\}$. Then:
1) if $\underline{0} \lneqq \underline{\beta} \leq \underline{w}$ we have

$$\begin{cases} \left|\binom{p\underline{w}}{p\underline{\beta}}\right| \leq 1 \\ \left|\mathcal{G}_{p\underline{w}-p\underline{\beta}}\right|_X \leq 1 \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^{p\underline{\beta}}(\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}})\right|_X \leq |\pi|\left|\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right|_X \leq |\pi|^{s+1}\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X \end{cases},$$

and for $\underline{\beta}=0$

$$\left|\mathcal{G}_{p\underline{w}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right|_X \leq |\pi|^{s+1}\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X .$$

So

$$\left|\binom{p\underline{w}}{p\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-p\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^{p\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\right|_X \leq |\pi|^{s+1}\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X, \ \forall\ \underline{0} \leq \underline{\beta} \leq \underline{w} .$$

2) if $(p,\underline{\beta})=1$ and $\underline{0} \lneqq \underline{\beta} \leq p\underline{w}$ we have

$$\begin{cases} \left|\binom{p\underline{w}}{\underline{\beta}}\right| \leq |p| \leq |\pi| \\ \left|\mathcal{G}_{p\underline{w}-\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right)\right|_X \leq |\pi|^s\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X \end{cases},$$

and hence

$$\left|\binom{p\underline{w}}{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{p\underline{w}-\underline{\beta}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^{\underline{\beta}}\mathcal{G}_{ps\underline{w}p+\underline{\alpha}}\right)\right|_X \leq |\pi|^{s+1}\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X, \ \forall\ \underline{0} \lneqq \underline{\beta} \leq p\underline{w},\ (p,\underline{\beta})=1 .$$

Therefore we obtain $\left|\mathcal{G}_{ps\underline{w}+\underline{\alpha}}\right|_X \leq |\pi|^s\left|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}\right|_X$, for all $s\in\mathbb{N}$, $\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d$ and $\underline{w}\in\mathbb{N}^d$ such that $|\underline{w}|_\infty = n$.

From (2.4.1), by induction on $\#\{i=1,\ldots,N : s_i\neq 0\}$, it follows that

$$\left|\mathcal{G}_{\sum_{i=1}^N s_i p\underline{w}^{(i)}}\right|_X \leq |\pi|^{\sum_{i=1}^N s_i} .$$

∎

Proof of proposition (2.3). Let us suppose that $R_X(M) \gneqq |p|^{1/(p-1)}$ and choose $R \gneqq 0$ such that $R_X(M) \gneqq R \gneqq |p|^{1/(p-1)}$. Then

$$\lim_{|\underline{\alpha}|_\infty\to\infty}\left|\frac{\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\right|_X R^{|\underline{\alpha}|_\infty} = 0 .$$

For any $n\in\mathbb{N}$, we write n in the form $n = n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \ldots + n_0$, with $0 \leq n_i \leq p-1$, for all $i=0,\ldots,k$, and we have (*cf.* for instance [DGS, page 51])

$$|n!| = |p|^{\frac{n-S_n}{p-1}} \text{, with } S_n = n_k + n_{k-1} + \ldots + n_0. \tag{2.4.2}$$

If we choose $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ such that $\alpha_i = p^s$, with $s \in \mathbb{N}$, we obtain

$$\frac{R^{|\underline{\alpha}|_\infty}}{|\underline{\alpha}!|} = \left(\frac{R}{|p|^{1/(p-1)}}\right)^{dp^s} |p|^{d/(p-1)} ,$$

which implies that

$$\limsup_{|\underline{\alpha}|_\infty \to \infty} \frac{R^{|\underline{\alpha}|_\infty}}{|\underline{\alpha}!|} = +\infty .$$

Therefore we conclude that

$$\lim_{|\underline{\alpha}|_\infty \to \infty} |\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}|_X = 0 .$$

It follows that there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that, for $|\underline{\alpha}|_\infty \geq n$, we have $|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}|_X \lneqq 1$, hence $(\mathcal{M}_k, \nabla_k)$ is nilpotent.

On the other hand, suppose that $(\mathcal{M}_k, \nabla_k)$ is nilpotent of exponent $\leq n$. Let $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, with $|\underline{\alpha}|_\infty \geq dpn$; since there exists $i_\circ = 1, \ldots, d$, such that $\alpha_{i_\circ} \geq np$, we can find $\underline{s} \in \mathbb{N}^N$ such that:

$$\underline{\alpha} = \sum_{i=1}^N s_i p \underline{w}^{(i)} + \underline{\beta} ,$$

where $\{\underline{w}^{(i)} : i = 1, \ldots, N\}$ is the set of all $\underline{w} \in \mathbb{N}^d$ such that $|\underline{w}|_\infty = n$, $|\underline{\beta}|_\infty \lneqq dpn$ and

$$\sum_{i=1}^N s_i = \frac{|\underline{\alpha}|_\infty - |\underline{\beta}|_\infty}{pn} \gneqq \frac{|\underline{\alpha}|_\infty}{pn} - d .$$

By (2.1.2), $|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}|_X \leq |\mathcal{G}_{\underline{\alpha}'}|$, when $\alpha_i \geq \alpha'_i$ for all $i = 1, \ldots, d$; therefore the previous lemma implies:

$$|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}|_X \leq \left|\mathcal{G}_{\sum_{i=1}^N s_i p \underline{w}^i}\right|_X \leq |\pi|^{\frac{|\underline{\alpha}|_\infty}{pn} - d} . \tag{2.4.3}$$

Finally we conclude:

$$\begin{aligned}\limsup_{|\underline{\alpha}|_\infty \to \infty} \left|\frac{\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\right|_X^{\frac{1}{|\underline{\alpha}|_\infty}} &\leq \limsup_{|\underline{\alpha}|_\infty \to \infty} |\pi|^{\left(\frac{|\underline{\alpha}|_\infty}{pn} - d\right)\frac{1}{|\underline{\alpha}|_\infty}} |p|^{-1/(p-1)} \\ &= |\pi|^{1/pn} |p|^{-1/(p-1)} \lneqq |p|^{-1/(p-1)} .\end{aligned}$$

■

3. Size of G-connections.

In this section we will use the notation introduced in §1. We now prove our main result

Theorem 3.1. *Let (M, ∇) be a differential $\mathcal{F}/K$-module of type G and of finite rank μ; we assume that (M, ∇) admits a model $(\mathcal{M}, \nabla)$ over a smooth S-model X of $\mathcal{F}/K$. If Σ'_S is the* *subset of Σ_S of primes v such that the induced connection $(\mathcal{M}_{k(v)},\nabla_{k(v)})$ on the closed fiber $X_{k(v)}$ does not have p-curvature 0 and*

$$\Delta(M)=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma'_S\\ p(v)\le n}}\log|p(v)|_v^{-1}\ ,$$

then:

$$\Delta(M)\le\sigma_{X/S}(M)-\varrho_{X/S}(M)\le\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\mu-1}\right)\Delta(M)\ .$$

Before giving the proof of the theorem, we need a lemma:

Lemma 3.2. *Under the hypothesis of the theorem, let Σ''_S be set of all $v\in\Sigma_S$ such that the induced connection $(\mathcal{M}_{k(v)},\nabla_{k(v)})$ on the closed fiber $X_{k(v)}$ has p-curvature 0. We have:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S}h_X(\mathcal{M},n,v)=\sum_{v\in\Sigma''_S}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ .$$

Proof. The proof is divided in steps. In the first step we prove

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S}h_X(\mathcal{M},n,v)\ge\sum_{v\in\Sigma''_S}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ ,\tag{3.2.1}$$

while steps from 2 to 5 are devoted to the proof of

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S}h_X(\mathcal{M},n,v)\le\sum_{v\in\Sigma''_S}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ .\tag{3.2.2}$$

Step 1. *Proof of* (3.2.1).
We observe that for any $N\in\mathbb{N}$ we have

$$\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S}h_X(\mathcal{M},n,v)\ge\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\le N}}h_X(\mathcal{M},n,v)$$

and therefore by Fatou's Lemma we obtain

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S}h_X(\mathcal{M},n,v)\ge\sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\le N}}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ .$$

We deduce (3.2.1) by taking the limit for $N\to\infty$.
Step 2. *Let $R'_{X,v}=|\pi_v|_{X,v}^{-1/p}|p|_v^{1/(p-1)}$, with $p=p(v)$. Then*

$$h_X(\mathcal{M},n,v)\le n\log\frac{1}{R'_{X,v}}\ .$$

It is enought to prove that for any $v \in \Sigma_S''$ and any $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ we have

$$|\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \left(\frac{1}{R'_{X,v}}\right)^{|\underline{\alpha}|_\infty} . \tag{3.2.3}$$

Let $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ be such that $\alpha_i < p$ for any $i = 1, \dots, d$. Then (3.2.3) is obviously verified. So let $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ be such that there exists $i = 1, \dots, d$ such that $\alpha_i \geq p$. Then there exists $s_1, \dots, s_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{N}$, with $0 \leq \beta_i \leq p-1$, such that $\alpha_i = s_i p + \beta_i$, for all $i = 1, \dots, d$, *i.e.*

$$\underline{\alpha} = \sum_{i=1}^{d} s_i p \underline{1}_i + (\beta_1, \dots, \beta_d) .$$

By (2.1.2) and (2.4) we have

$$|G_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \left| \frac{G_{\sum_{i=1}^{d} s_i p \underline{1}_i}}{\underline{\alpha}!} \right|_{X,v} \leq \prod_{i=1}^{d} \frac{|\pi_v|_v^{s_i}}{|\alpha_i!|_v} .$$

Using (2.4.2), we deduce that

$$|G_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \prod_{i=1}^{d} |\pi_v|_v^{s_i} |p|_v^{\frac{S_{\alpha_i} - \alpha_i}{p-1}} \leq \prod_{i=1}^{d} \frac{|\pi_v|_v^{\left[\frac{\alpha_i}{p}\right]} |\pi_v|_v^{S_{\alpha_i}/(p-1)}}{|p|_v^{\frac{\alpha_i}{p-1}}} .$$

We notice that

$$\frac{\alpha_i}{p} - \left[\frac{\alpha_i}{p}\right] \leq \frac{S_{\alpha_i}}{p} \leq \frac{S_{\alpha_i}}{(p-1)}$$

and hence that

$$|G_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \prod_{i=1}^{d} \frac{|\pi_v|_v^{\alpha_i/p}}{|p|_v^{\frac{\alpha_i}{p-1}}} = \left(|\pi_v|_v^{1/p} |p|_v^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{|\underline{\alpha}|_\infty} ,$$

which proves (3.2.3).

Step 3. *Proof of the inequality*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma_S''} h_X(\mathcal{M}, n, v) \leq \sum_{\substack{v \in \Sigma_S'' \\ p(v) \leq N}} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \limsup_{n\to\infty} \sum_{\substack{v \in \Sigma_S'' \\ N \lneqq p(v) \leq n}} \log \frac{1}{R'_{X,v}} . \tag{3.2.4}$$

We notice that for $p(v) \gneqq |\underline{\alpha}|_\infty$ we have

$$|\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq 1 ,$$

and hence

$$\sum_{v \in \Sigma_S''} h_X(\mathcal{M}, n, v) = \sum_{\substack{v \in \Sigma_S'' \\ p(v) \leq n}} h_X(\mathcal{M}, n, v) .$$

Therefore, for any $N \in \mathbb{N}$, $N \lneqq n$, by *Step 2* we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S} h_X(\mathcal{M},n,v) &= \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\leq N}} \frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) + \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ N\lneqq p(v)\leq n}} \frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v)\\ &\leq \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\leq N}} \frac{1}{n}h_X(\mathcal{M},n,v) + \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ N\lneqq p(v)\leq n}} \log\frac{1}{R'_{X,v}}\ .\end{aligned}$$

Proposition 1.8 allows us to deduce (3.2.4) by the previous inequality.

Step 4. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ N\lneqq p(v)\leq n}} \log\frac{1}{R'_{X,v}}$ *is finite.*

We have

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\gneqq N}} \log\frac{1}{R'_{X,v}} = \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\gneqq N}} \log\left(|p(v)|_v^{1/p(v)e_v}|p(v)|_v^{-1/(p(v)-1)}\right)\ ;$$

where e_v is the ramification index of v with respect to $p(v)$. Since $e_v = 1$ for almost all v, it is enough to study the convergence of the following series for $N >> 0$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\gneqq N}} \log\left(|p(v)|_v^{\frac{1}{p(v)}}\ |p(v)|_v^{\frac{-1}{(p(v)-1)}}\right) &= \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\gneqq N}} \log\left(|p(v)|_v^{\frac{-1}{p(v)(p(v)-1)}}\right)\\ &\leq \sum_{p\gneqq N}\log\left(\prod_{v|p}|p|_v\right)^{\frac{-1}{p(p-1)}} = \sum_{p\gneqq N}\frac{\log p}{p(p-1)} \leq \sum_{p\gneqq N}\frac{1}{(p-1)^{3/2}}\ .\end{aligned}$$

Step 5. *Conclusion of the proof of* (3.2.2).

By *Step 4*, the inequality (3.2.4) becomes

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma''_S} h_X(\mathcal{M},n,v) \leq \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\leq N}} \log\frac{1}{R_{X,v}(M)} + \sum_{\substack{v\in\Sigma''_S\\ p(v)\gneqq N}} \log\frac{1}{R'_{X,v}}\ .$$

We conclude the proof of (3.2.2) taking $N \to +\infty$. ■

Proof of the theorem 3.1. Because of lemma 3.2, it is enough to prove the following inequalities:

$$\Delta(M) + \sum_{v\in\Sigma'_S}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma'_S} h_X(\mathcal{M},n,v) \tag{3.2.5}$$

and

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma'_S} h_X(\mathcal{M},n,v) \leq \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\mu-1}\right)\Delta(M) + \sum_{v\in\Sigma'_S}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}\ . \tag{3.2.6}$$

We first prove (3.2.5). By definition of Σ'_S, if $n \geq p(v)$, we have

$$h_X(\mathcal{M}, n, v) \geq \log |p(v)|_v^{-1} .$$

For $n \gneq N$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma'_S} h_X(\mathcal{M}, n, v) &\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq N}} h_X(\mathcal{M}, n, v) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ N \lneq p(v) \leq n}} \log |p(v)|_v^{-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq N}} h_X(\mathcal{M}, n, v) + \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} \log |p(v)|_v^{-1} - \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq N}} \log |p(v)|_v^{-1} \right) ; \end{aligned}$$

hence we deduce that

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma'_S} h_X(\mathcal{M}, n, v) \geq \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq N}} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \Delta(M) .$$

Finally, we find (3.2.5) taking the limit for $N \to +\infty$.

We now discuss the upper bound (3.2.6). We notice that $|\mathcal{G}_{\underline{\alpha}}|_{X,v} \leq 1$ for all $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$. Then the Dwork-Robba theorem [BD]* affirms that

$$|\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \{|\underline{\alpha}|_\infty, (\mu - 1)\}_v \frac{1}{R_{X,v}(M)^{|\underline{\alpha}|_\infty}} ,$$

where

$$\{n, s\}_v = \sup_{\substack{1 \leq \lambda_1 \lneq \lambda_2 \lneq \cdots \lneq \lambda_s \leq n \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{N}}} \left(\frac{1}{|\lambda_1 \cdots \lambda_s|_v} \right) .$$

We set

$$\begin{cases} a_v = |p(v)|_v^{-1} \\ \Theta_{\Sigma'_S}(n) = \displaystyle\sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} \log a_v \end{cases}$$

and, for $n \geq p(v)$,

$$\begin{aligned} \theta(n, v) &= (\mu - 1) \left[\frac{\log n}{\log p(v)} \right] \log a_v - \log\{n, (\mu - 1)\}_v \\ &= \frac{[K_v : \mathbb{Q}_p]}{[K : \mathbb{Q}]} \left((\mu - 1) \left[\frac{\log n}{\log p(v)} \right] \log p(v) - \log\{n, (\mu - 1)\}_{p(v)} \right) . \end{aligned}$$

---

* We learned the proof of the generalization of the Dwork-Robba theorem from Professor Dwork's course held at Padova University in the academic year 1994/95. The effective estimate

$$|\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq \sup_{|\underline{\beta}|_\infty \leq \mu - 1} \left(|G_{\underline{\beta}}|_{X,v} R_{X,v}(M)^{|\underline{\beta}|_\infty} \right) \{|\underline{\alpha}|_\infty, (\mu - 1)\}_v \frac{1}{R_{X,v}(M)^{|\underline{\alpha}|_\infty}} ,$$

in the several variable case, can be deduce by [DGS, IV, 3.2], using an argument of generic line. In [G], Gachet uses the same idea to prove an analogous effective estimate on a polyannulus.

Let $p(v) \geq \mu$ and let $i = 1, \dots, \mu - 1$. If $(\mu - i - 1)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]} \leq n \lneqq (\mu - i)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]}$ then

$$\log\{n, (\mu-1)\}_{p(v)} = (\mu - i - 1)\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] \log a_v + i\left(\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] - 1\right) \log a_v = i \log a_v$$

and if $(\mu - 1)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]} \leq n \lneqq p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]+1}$ then

$$\log\{n, (\mu-1)\}_{p(v)} = (\mu - 1)\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] \log a_v \ .$$

We conclude that for all $i = 1, \dots, \mu - 1$ we have

$$\theta(n, v) = i \log a_v \ \text{ if } (\mu - i - 1)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]} \leq n \lneqq (\mu - i)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]} \ ,$$

and

$$\theta(n, v) = 0 \ \text{ if } (\mu - 1)p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]} \leq n \lneqq p(v)^{\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right]+1} \ .$$

Hence for $n \geq \mu^2$ we deduce

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} \theta(n, v) &= \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq \sqrt{n}}} \theta(n, v) + \sum_{h=1}^{(\mu-2)} h \left(\Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - h - 1}\right) - \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - h}\right)\right) \\
&= \sum_{h=1}^{(\mu-2)} h \left(\Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - h - 1}\right) - \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - h}\right)\right) + o(n) \\
&= (\mu - 1)\Theta_{\Sigma'_S}(n) - \left(\Theta_{\Sigma'_S}(n) + \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{2}\right) \cdots + \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - 1}\right)\right) + o(n) \ .
\end{aligned}$$

Since $\{n, (\mu - 1)\}_v = 1$ for $p(v) \gneqq n$, we obtain

$$h_X(\mathcal{M}, n, v) = \sup_{|\underline{\alpha}|_\infty \leq n} \log |\mathcal{G}_{[\underline{\alpha}]}|_{X,v} \leq n \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \begin{cases} \log\{n, (\mu - 1)\}_v & \text{if } p(v) \leq n \\ 0 & \text{if } \ p(v) \gneqq n \end{cases} ,$$

and therefore

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma'_S} h_X(\mathcal{M}, n, v) &\leq \sum_{v \in \Sigma'_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} \log\{n, (\mu - 1)\}_v \\
&\leq \sum_{v \in \Sigma'_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} \left((\mu - 1)\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] \log a_v - \theta(n, v)\right) \\
&\leq \sum_{v \in \Sigma'_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\Theta_{\Sigma'_S}(n) + \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + \Theta_{\Sigma'_S}\left(\frac{n}{\mu - 1}\right)\right) \\
&\qquad + \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v \in \Sigma'_S \\ p(v) \leq n}} (\mu - 1)\left(\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] \log a_v - \log a_v\right) \\
&\leq \sum_{v \in \Sigma'_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\mu - 1}\right) \Delta(M) + A(\mu - 1) \ ,
\end{aligned}$$

where

$$A = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma'_S \\ p(v)\le n}} \left(\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] - 1\right) \log a_v \ .$$

For $\sqrt{n} \lneqq p(v) \le n$ we observe that

$$1 \le \frac{\log n}{\log p(v)} \lneqq 2$$

and hence that

$$\left(\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] - 1\right) = 0 \ .$$

We deduce that

$$\begin{aligned} 0 \le A &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma'_S \\ p(v)\le \sqrt{n}}} \left(\left[\frac{\log n}{\log p(v)}\right] - 1\right) \log a_v \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma'_S \\ p(v)\le \sqrt{n}}} \left(\frac{\log n}{\log p(v)} - 1\right) \log p(v) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma'_S \\ p(v)\le \sqrt{n}}} \left(1 - \frac{\log p(v)}{\log n}\right) \\ &\le [K:\mathbb{Q}] \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \sum_{p\le\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\log p}{\log n}\right)\right) \\ &\le [K:\mathbb{Q}] \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0 \ . \end{aligned}$$

We conclude that $A = 0$ and therefore we have proved (3.2.6). ■

4. Nilpotence and lower bounds.

Following [D], we give another inequality, more precise then (3.2.5), related to the order of nilpotence.

Proposition 4.1. *Let (M,∇) be a differential $\mathcal{F}/K$-module of type G and of rank μ; we assume that (M,∇) admits a model $(\mathcal{M},\nabla)$ over a smooth S-model X of $\mathcal{F}/K$. If $\Sigma_S^{(m)}$ is the subset of Σ_S of all primes v such that the induced connection $(\mathcal{M}_{k(v)},\nabla_{k(v)})$ on the closed fiber $X_{k(v)}$ is nilpotent of order m (i.e. nilpotent of order $\le m$, but not of order $\le m-1$) and*

$$\Delta^{(m)}(M) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)} \\ p(v)\le n}} \log |p(v)|_v^{-1} \ ,$$

then we have

(4.1.1)

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma_S^{(m)}}h_X(\mathcal{M},n,v)\geq\sum_{p\in\Sigma_S^{(m)}}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(m-1)}\right)\Delta^{(m)}(M)\ .$$

Proof. There exists $\underline{w}\in\mathbb{N}^d$ such that $|\underline{w}|_\infty=m-1$ and

$$\left|\mathcal{G}_{[p\underline{w}]}\right|_{X,v}=\left|\frac{1}{(p\underline{w})!}\right|_v\ .$$

Therefore for any $n\in\mathbb{N}$ and for $j=\min\left(\left[\frac{n}{p}+1\right],m\right)$ (*i.e.* either j is an integer smaller then m such that $\frac{n}{j}\lneqq n\leq\frac{n}{j-1}$ either $j=m$) we have

$$h_X(\mathcal{M},n,v)\geq(j-1)\log|p(v)|_v^{-1}\ .$$

For a fixed $N\in\mathbb{N}$, $N\gneqq 0$, and for $n\geq Nm$ we deduce that

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ p(v)\gneqq N}}h_X(\mathcal{M},n,v)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ N\lneqq p(v)\leq\frac{n}{m-1}}}h_X(\mathcal{M},n,v)+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{m-1}\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ \frac{n}{j}\lneqq p(v)\leq\frac{n}{j-1}}}h_X(\mathcal{M},n,v)\ .$$

If we set

$$\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}(n)=\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ p(v)\leq n}}\log|p(v)|_v^{-1}\ ,$$

then we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ p(v)\gneqq N}}h_X(\mathcal{M},n,v)&\geq(m-1)\frac{1}{n}\left(\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}\left(\frac{n}{m-1}\right)-\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}(N)\right)\\&\quad+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)\left(\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}\left(\frac{n}{j-1}\right)-\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}\left(\frac{n}{j}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m-1}\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}\left(\frac{n}{j-1}\right)-\frac{m-1}{n}\Theta_{\Sigma_S^{(m)}}(N)\ ,\end{aligned}$$

and therefore

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{v\in\Sigma_S^{(m)}\\ p(v)\gneqq N}}h_X(\mathcal{M},n,v)\geq\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(m-1)}\right)\Delta^{(m)}(M)\ .$$

We have proved that

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma_S^{(m)}}h_X(\mathcal{M},n,v)\geq\sum_{\substack{p\in\Sigma_S^{(m)}\\ p(v)\leq N}}\log\frac{1}{R_{X,v}(M)}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(m-1)}\right)\Delta^{(m)}(M)\ .$$

We get (4.1.1) by taking the limit for $N \to +\infty$. ∎

Corollary 4.2. *Under the hypothesis of the previous proposition we have*

$$\sigma_{X/S}(M) - \varrho_{X/S}(M) \geq \sum_{m=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)}\right) \Delta^{(m)}(M) \ . \tag{4.2.1}$$

Proof. Let $\widetilde{\Sigma}_S$ be the set of all primes $v \in \Sigma_S$ such that $(\mathcal{M}, \nabla)$ has not nilpotent reduction or zero p-curvature. By Fatou's Lemma, we have

$$\begin{aligned}
\sigma_{X/S}(M) &\geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma_S} h_X(\mathcal{M}, n, v) \\
&\geq \sum_{m=2}^{\infty} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{v \in \Sigma_S^{(m)}} h_X(\mathcal{M}, n, v) + \liminf_{n \to +\infty} \sum_{v \in \widetilde{\Sigma}_S} \frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n, v) \\
&\geq \sum_{m=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)}\right) \Delta^{(m)}(M) + \sum_{v \in \Sigma_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} \ .
\end{aligned}$$

∎

Remark 4.3. We point out that in the last inequality we have

$$\liminf_{n \to +\infty} \sum_{v \in \widetilde{\Sigma}_S} \frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n, v) = \sum_{v \in \widetilde{\Sigma}_S} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} \ .$$

Actually, the left hand side is greater or equal the right hand side by Fatou's lemma. To prove the other inequality we consider two cases:
1) if $(\mathcal{M}_{k(v)}, \nabla_{k(v)})$ is not nilpotent, then:

$$\frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n, v) = \frac{1}{n} \log \left| \frac{1}{n!} \right|_{X,v} \leq \frac{\log |p(v)|_{X,v}}{p-1} = \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} \ .$$

So

$$\liminf_{n \to +\infty} \sum_{\text{non nilpotent}} \frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n, v) \leq \sum_{\text{non nilpotent}} \log \frac{1}{R_{X,v}(M)} \ ,$$

where the sum is taken over the $v \in \Sigma_S$ such that $(\mathcal{M}_{k(v)}, \nabla_{k(v)})$ is not nilpotent.
2) if $(\mathcal{M}_{k(v)}, \nabla_{k(v)})$ has zero p-curvature, then the equality is just a consequence of (3.2).

Dwork has conjectured in his article [D] that the last lower bound (4.2.1) is, in fact, an equality.

Appendix. Generalization of Eisenstein's theorem to the several variables case.

We have defined for a smooth $\overline{\mathbb{Q}}^{alg}$-variety V a full subcategory $\mathbf{G}(V)$ of the abelian category $\mathbf{MIC}(V)$ of quasi-coherent $\mathcal{O}_V$-modules with an integrable $V/\overline{\mathbb{Q}}^{alg}$-connection, whose objects are coherent $\mathcal{O}_V$-modules equipped with a G-connection. It is easy to show (*cf.* [AB] or [B]) that $\mathbf{G}(V)$ is a thick tannakian subcategory of $\mathbf{MIC}(V)$. So, it contains $(\mathcal{O}_V, V)$ and is stable by $-\otimes_{\mathcal{O}_V}-$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(-,-)$, duality and extensions. Moreover, it is stable by taking subquotients.

If $f : V \longrightarrow W$ is any morphism of smooth $\overline{\mathbb{Q}}^{alg}$-varieties, f^*, in the sense of $\mathcal{O}$-modules, induces a functor

$$f^* : \mathbf{G}(W) \longrightarrow \mathbf{G}(V)\ .$$

If $f : V \longrightarrow W$ is an étale covering (*i.e.* a finite étale morphism), then f_* induces a functor

$$f_* : \mathbf{G}(V) \longrightarrow \mathbf{G}(W)\ .$$

This is some sort of generalization of the Eisenstein's theorem:

Proposition A.1. *In the notation of §1, let $\varphi : X \longrightarrow Y$ be an étale covering of smooth S-models X and Y. Then:*
1) If $(\mathcal{M}, \nabla)$ is a model of (M, ∇) over X/S, then $R_{X,v}(M) = R_{Y,v}(\varphi_* M)$, $\sigma_{X/S}(M) = \sigma_{Y/S}(\varphi_* M)$ and $\varrho_{X/S}(M) = \varrho_{Y/S}(\varphi_* M)$.
2) If $(\mathcal{N}, \nabla)$ is a model of (N, ∇) over Y/S, then $R_{X,v}(\varphi^* N) = R_{Y,v}(N)$, $\sigma_{X/S}(\varphi^* N) = \sigma_{Y/S}(N)$ and $\varrho_{X/S}(\varphi^* N) = \varrho_{Y/S}(N)$.

Proof.
1) We notice that

$$\varphi_* \mathcal{P}^n_{X/S} \cong \mathcal{P}^n_{Y/S} \otimes \varphi_* \mathcal{O}_X\ .$$

Let us consider the stratification data

$$\Theta^{(n)} : \mathcal{M} \longrightarrow \left(\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes \mathcal{M}\right) \otimes K\ .$$

We obtain

$$\varphi_* \Theta^{(n)} : \varphi_* \mathcal{M} \longrightarrow \varphi_* \left(\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes \mathcal{M}\right) \otimes K \cong \left(\mathcal{P}^n_{Y/S} \otimes \varphi_* \mathcal{M}\right) \otimes K\ ,$$

and hence the ideal $I^{(n)}$ (*cf.* (1.6.3)) does not change. Therefore we have

$$R_{X,v}(M) = R_{Y,v}(\varphi_* M),\ \sigma_{X/S}(M) = \sigma_{Y/S}(\varphi_* M) \text{ and } \varrho_{X/S}(M) = \varrho_{Y/S}(\varphi_* M).$$

2) Since $\varphi^* \mathcal{P}^n_{Y/S} \cong \mathcal{P}^n_{X/S}$, applying the functor φ^* to

$$\Theta'^{(n)} : \mathcal{N} \longrightarrow \left(\mathcal{P}^n_{Y/S} \otimes \mathcal{N}\right) \otimes K\ ,$$

we obtain

$$\varphi^*\Theta'^{(n)} : \varphi^*\mathcal{N} \longrightarrow \varphi^*\left(\mathcal{P}^n_{Y/S}\otimes\mathcal{N}\right)\otimes K \cong \left(\mathcal{P}^n_{X/S}\otimes\varphi^*\mathcal{N}\right)\otimes K\ .$$

This proves that $R_{X,v}(\varphi^*N) = R_{Y,v}(N)$, $\sigma_{X/S}(\varphi^*N) = \sigma_{Y/S}(N)$ and $\varrho_{X/S}(\varphi^*N) = \varrho_{Y/S}(N)$. ■

References.

[A] André Y.: "*G-functions and Geometry*", Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[AB] André Y., Baldassarri F.: "Geometric theory of G-functions", in *Arithmetic Geometry*, F. Catanese Ed., Symp. Math. XXXVII, Cambridge Univ. Press, 1997.

[B] Baldassarri F.: "Generic radii of convergence of p-adic analytic connections and spectral norms", in preparation.

[BD] Baldassarri F., Di Vizio L.: "Continuity of the local radius of convergence for a connection over a Berkovich analytic space", in preparation.

[BO] Berthelot P., Ogus A.: "*Notes on Crystalline Cohomology*", Mathematical notes, Princeton University Press, 1978.

[D] Dwork B.: "On the size of differential modules", Duke Math. J., 96 (1999), no. 2, 225-239.

[DGS] Dwork B., Gerotto G., Sullivan F.: "*An Introduction to* G-*functions*", Annals of Mathematical Studies 133, Princeton University Press, Princeton N.J., 1994.

[G] Gachet F.: "Structure Fuchsienne pour des Modules Différentiels sur une Polycouronne Ultramétrique", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 102 (1999), 157-218.

Section II. Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables

Introduction.

La notion de G-fonction a été introduite par C.L. Siegel en 1929. Dans les années quatre-vingts la théorie des G-fonctions (à une variable) a repris une nouvelle force, grâce aux travaux de E. Bombieri, D.V. et G.V. Chudnovsky, Y. André et B. Dwork, qui ont, entre autre, mis en évidence ses liens avec la géométrie arithmétique. Un des piliers de cette théorie est le théorème de Chudnovsky [1, VI] rappelé ci-dessous. Il joue aussi un rôle fondamental dans la théorie des séries Gevrey de type arithmétique développée par Y. André(1).

Donnons brièvement quelques définitions. Soient K un corps de nombres et $\mathcal{V}_K$ son anneau des entiers. On appelle G-fonction une série formelle $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ à coefficients dans K, telle que :
1) il existe $\mathcal{L} \in K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$ qui annule y : $\mathcal{L}y = 0$;
2) pour toute immersion $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, la série entière y a rayon de convergence non nul, en tant que série à coefficients complexes;
3) il existe une suite de nombres entiers positifs $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une constante C réelle positive telles que $N_n a_s \in \mathcal{V}_K$ pour tout $s \leq n$ et telles que $N_n \leq C^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On considère maintenant un opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\mu} A_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \in K\left[x, \frac{d}{dx}\right] .$$

On peut construire une suite d'opérateurs $(\mathcal{L}_n)_{n\geq 1}$ telle que $\mathcal{L}_n$ est l'unique opérateur divisible à droite par $\mathcal{L}$ et de la forme :

$$\mathcal{L}_n = \frac{A_\mu(x)^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu+n-1} + \sum_{i=0}^{\mu-1} A_{i,n}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \ , \text{ avec } A_{i,n}(x) \in K[x].$$

On dit que $\mathcal{L}$ est un G-opérateur ou un opérateur de type G s'il existe une suite de nombres entiers positifs $(N_n)_{n\geq 1}$ et une constante C réelle positive telles que $N_n A_{i,s} \in \mathcal{V}_K[x]$ pour tout

(1) *"Séries Gevrey de type arithmétique I et II"*, Annals of Mathematics, 151 (2000), 705-756.

$s \leq n$ et $i = 0, \ldots, \mu-1$ et telles que $N_n \leq C^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de Chudnovsky dit que l'opérateur minimal qui annule une G-fonction donnée est de type G; cela, grâce à [8, 13.0] et à [6], implique le théorème suivant :

Théorème 0.2. *L'opérateur différentiel minimal qui annule une G-fonction donnée est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont rationnels.*

Dans ce papier nous généralisons à plusieurs variables le théorème de Chudnovsky que nous venons d'énoncer (*cf.* Th. 4.1), dans un contexte plus géométrique, qui a été introduit par Y. André et F. Baldassarri dans [2]. Nous déduisons des résultats de [3] une généralisation de [8, 13.0] (*cf.* 6.2.1), qui, avec [5], nous permettra d'obtenir l'analogue à plusieurs variable de (0.2).

Nous envisageons cet article comme une contribution à la construction d'une théorie des opérateurs arithmétiques à plusieurs variables, obtenus à partir des G-opérateurs par transformation de Fourier partielle, et pour laquelle notre résultat devrait être un outil essentiel. Le but de cette théorie pourrait être le développement de techniques qui permettent d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique des valeurs des fonctions de la forme :

$$f(x,y) = P(e^x, {}_2F_1(a,b,c;y)) \ , \ \text{avec } a,b,c \in \mathbb{Q},$$

où $P(T)$ est un polynôme, les valeurs d'une telle fonction étant liées à e et π.

Remerciements. L'auteur tient spécialement à remercier Y. André pour lui avoir suggeré de travailler sur ce sujet et pour son assistance tout le long de la préparation du présent papier. Elle remercie aussi D. Bertrand pour ses remarques sur le texte et Z. Djadli pour son cyclopéen travail de correction des fautes de francais.

Cet article est organisé comme suit :

1. Notations.

1.1. Soient K un corps de nombres et $\mathcal{V}_K$ l'anneau des entiers de K. On utilise la notation $|\ |_v$ pour une valeur absolue v-adique de K telle que $v|p$, où p est un premier de $\mathbb{Z}$, ou pour une norme qui induit une norme archimédienne sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas non-archimédien on normalise $|\ |_v$ de la facon suivante :

$$|p|_v = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]} \ ,$$

où K_v est le complété de K par rapport à $|\ |_v$ et $v|p$. De facon similaire, dans le cas archimédien, on normalise $|\ |_v$ en posant :

$$|x|_v = \begin{cases} |x|_{\mathbb{R}}^{1/[K:\mathbb{Q}]} & \text{si } K_v = \mathbb{R} \\ |x|_{\mathbb{C}}^{2/[K:\mathbb{Q}]} & \text{si } K_v = \mathbb{C} \end{cases} .$$

On remarque que pour ce choix de normalisation la Formule du Produit est valable :

$$\prod_v |x|_v = 1 \ , \ \forall\, x \in K.$$

On note Σ_f l'ensemble des v tels que $v|p$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et Σ_∞ l'ensemble des v tels que $|\ |_v$ étend la norme archimédienne de $\mathbb{Q}$.

1.2. Dans la suite on utilisera les notations suivantes :
X=K-schéma lisse de dimension relative d, de type fini et géométriquement connexe.
$\mathcal{F} = \kappa(X)$= corps des fonctions rationnelles sur X.
Soient $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ des coordonnées étales locales sur X et $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $i = 1, \ldots, d$. On note $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ les éléments de $\mathbb{N}^d$ et pour tout $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{N}^d$ on pose :

$$|\underline{\alpha}| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \ , \ \underline{\alpha}! = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i! \ ,$$
$$\underline{\alpha} \leq \underline{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, d$$
$$\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \ , \ \text{si } \underline{\alpha} \geq \underline{\beta}$$
$$\underline{x}^{\underline{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \ , \ \underline{D}^{\underline{\alpha}} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \ .$$

On note, enfin, $\underline{1}_i \in \mathbb{N}^d$ le multi-indice ayant toutes les entrées nulles sauf la i-ème égale à 1.

2. Modules différentiels de type G.

2.1. Soit $(\mathcal{M}, \nabla)$ un X/K-module différentiel localement libre de rang μ, muni de la connexion intégrable[(2)] ∇. On appelle (M, ∇) sa fibre au point générique de X. On observe que, étant donné un $\mathcal{F}/K$-module différentiel (M, ∇), on peut toujours trouver un schéma X/K convenable, tel qu'il existe un X/K-module différentiel $(\mathcal{M}, \nabla)$ libre muni d'une connexion intégrable ∇, dont (M, ∇) est la fibre au point générique, et tel que X admet des coordonnées étales globales $\underline{x}$: donc dans la suite on supposera que $(\mathcal{M}, \nabla)$ est libre sur X et que X admet des coordonnées étales globales.

(2) Dans la suite nous omettrons de rappeler que l'on considère toujours des connexions intégrables.

Soit $\underline{e}$ une base de $\mathcal{M}$, telle que :

$$\frac{1}{\underline{\alpha}!}\nabla\left(\underline{D}\right)^{\underline{\alpha}}\underline{e}=\underline{e}G_{\underline{\alpha}}\ ,\ \text{avec } G_{\underline{\alpha}}\in M_{\mu\times\mu}\left(\mathcal{O}(X)\right).$$

Les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ sont liées entre elles par la relation de récurrence :

$$(2.1.1)\qquad G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i}=\frac{1}{\alpha_i+1}\left(D_iG_{\underline{\alpha}}+G_{\underline{1}_i}G_{\underline{\alpha}}\right)\ ,\ \text{pour tout } \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d \text{ et pour tout } i=1,\dots,d.$$

Définition 2.2. *On choisit un sous-schéma ouvert S de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{V}_K)$ *et un S-schéma lisse X_S, de type fini, à fibres connexes et tel que $X_S\times_S\mathrm{Spec}(K)=X$. On note Σ_S l'ensemble des points fermés de S. Pour tout $v\in\Sigma_S$, on considère la norme $|\ |_{X,v}$ sur $\mathcal{F}$ associée à l'anneau local de X_S dans le point générique de la fibre spéciale de X_S sur v, normalisée de facon qu'elle étende $|\ |_v$*[3]*. On pose :*

$$h(\mathcal{M},n,v)=\sup_{|\underline{\alpha}|\le n}\log^+|G_{\underline{\alpha}}|_{X,v}\ ,\ \textit{pour tout } v\in\Sigma_S,$$

où $\log^+x=\log\sup(1,x)$ *pour tout $x\in\mathbb{R}$ et la norme de la matrice $G_{\underline{\alpha}}$ est égale au maximum de la norme de ses éléments. On appelle taille de $(\mathcal{M},\nabla)$ le nombre suivant :*

$$\sigma_S(\mathcal{M})=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v\in\Sigma_S}h(\mathcal{M},n,v)\ .$$

On dit que $(\mathcal{M},\nabla)$ est un module différentiel de type G s'il satisfait la condition de Galočkin :

$$\sigma_S(\mathcal{M})<\infty\ .$$

On dit qu'un $\mathcal{F}/K$-module différentiel (M,∇) est de type G s'il existe un module différentiel libre $(\mathcal{M},\nabla)$ sur un schéma X/K convenable tel que $(\mathcal{M},\nabla)$ est un module différentiel de type G.

On appelle rayon de convergence générique v-adique de $(\mathcal{M},\nabla)$ (ou de (M,∇)) le nombre :

$$R_v(\mathcal{M})=\inf\left(1,\liminf_{|\underline{\alpha}|\to\infty}|G_{\underline{\alpha}}|_{X,v}^{-1/|\underline{\alpha}|}\right)\ ,\ \textit{pour tout } v\in\Sigma_S,$$

et rayon inverse global le nombre :

$$\varrho_S(\mathcal{M})=\sum_{v\in\Sigma_S}\log^+\frac{1}{R_v(\mathcal{M})}\ .$$

---

(3) Si X est un sous-schéma ouvert de l'espace affine de dimension d sur K, la norme $|\ |_{X,v}$ est la norme de Gauss usuelle sur $K(\underline{x})=\kappa(X)$, définie par :

$$\left|\frac{\sum_{\underline{\alpha}}a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}}b_{\underline{\beta}}\underline{x}^{\underline{\beta}}}\right|_{v,Gauss}=\frac{\sup_{\underline{\alpha}}|a_{\underline{\alpha}}|_v}{\sup_{\underline{\beta}}|b_{\underline{\beta}}|_v}\ .$$

On dit que $(\mathcal{M}, \nabla)$ vérifie la condition de Bombieri si $\varrho_S(\mathcal{M})$ est fini.

Remarque 2.3. On sait (*cf.* [5]) que $h(\mathcal{M}, n, v)$ et $R_v(\mathcal{M})$ sont indépendants du choix des coordonnées étales $\underline{x}$ sur X et ne dépendent que de la fibre générique (M, ∇) de $(\mathcal{M}, \nabla)$. De plus $R_v(\mathcal{M})$ est indépendant du choix de la base $\underline{e}$ de $\mathcal{M}$.

De même, $\sigma_S(\mathcal{M})$ et $\varrho_S(\mathcal{M})$ ne dépendent que de X_S et de (M, ∇) et ils sont indépendants du choix de $\underline{x}$ et $\underline{e}$. Enfin, les conditions de Galočkin et de Bombieri sont équivalentes et ne dépendent que de la fibre géométrique de $\mathcal{M}$, donc ne dependent pas du choix de S (*cf.* [5]).

Par souci de simplicité nous donnons ici une définition algébrique de la notion de régularité et de la notion d'exposants dans les cas de plusieurs variables. C'est une des définitions données dans [3].

Soit Z un diviseur irréductible et lisse de X, $i_Z : Z \hookrightarrow X$ l'immersion fermée de Z dans X, η_Z le point générique de Z et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ des coordonnées étales sur X, telles que Z est le sous-schéma fermé d'équation $x_1 = 0$. Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\eta_Z}$ de X en η_Z est un anneau de valuation discrète de $\mathcal{F}$ avec uniformisant x_1, on peut lui associer une valeur absolue $|\ |_{X,Z}$, telle que $|x_1|_{X,Z} \in (0,1)$ et :

$$\mathcal{O}_{X,\eta_Z} = \{x \in \mathcal{F} : \ |x|_{X,Z} \leq 1\} .$$

On pose :

$$D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots,\ D_d = \frac{\partial}{\partial x_d} .$$

Soit $C = \mathcal{F}^{D_1} \subset \mathcal{F}$ le corps des constantes de D_1; C a degré de transcendance $d-1$ sur K, il est algébriquement clos dans $\mathcal{F}$ et $C^\times \subset \mathcal{O}_{X,\eta_Z}^\times$. Soit $\hat{\mathcal{F}}$ le completé x_1-adique de $\mathcal{F}$ et soit C' la clôture algébrique de C dans $\hat{\mathcal{F}}$. Alors C' est isomorphe au corps résiduel de $|\ |_{X,Z}$, il est une extension algébrique de C et $\hat{\mathcal{F}} \cong C'((x_1))$. On note $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ le $\hat{\mathcal{F}}/K$-module différentiel obtenu de (M, ∇) par passage au completé.

Définition 2.4. *On dit que $(\mathcal{M}, \nabla)$ est singulier régulier en Z si le $\hat{\mathcal{F}}/C'$-module différentiel obtenu de $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ par restriction de ∇ aux dérivations de $\hat{\mathcal{F}}/C'$ est singulier régulier dans le sens de* [8, §11], *i.e. s'il existe une base $\underline{e}$ de $\hat{M}$ sur $\hat{\mathcal{F}}$ telle que :*

$$\nabla(D_1)\,\underline{e} = \underline{e}\mathcal{H}_1\ ,\ \text{avec } \mathcal{H}_1 \in M_{\mu\times\mu}(C').$$

On appelle exposants de $(\mathcal{M}, \nabla)$ en Z l'image des valeurs propres de $\mathcal{H}_1$ dans la clôture algébrique de C' modulo $\mathbb{Z}$. On sait (cf. [3, App. A et 6.1.3]*) qu'ils ne dépendent pas du choix de $\underline{e}$ et sont en fait dans la clôture algébrique de K modulo $\mathbb{Z}$.*

Dans l'Appendice A nous allons donner une démonstration du résultat suivant :

Corollaire 2.5. *Un module différentiel de type G est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

3. G-fonctions.

Définition 3.1. *Soit $\left(a_{\underline{\alpha}}\right)_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ une famille de nombres algébriques. On considère les conditions suivantes :*
(G_1) pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante réelle positive C_1 telle que les conjugués des $a_{\underline{\alpha}}$ sont de module inférieur à $C_1^{|\underline{\alpha}|}$;
(G_2) il existe une constante réelle positive C_2 telle que le dénominateur commun dans $\mathbb{N}$ de $\left\{a_{\underline{\alpha}} : |\underline{\alpha}| \le n\right\}$ est inférieur à C_2^{n+1}.

Soient $P \in X$ un point fermé de X et $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$ de X en P. Le choix des coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ sur X détermine une immersion de K-algèbres différentielles

$$(3.1.1) \qquad \begin{array}{rcl} \tau \;:\hat{\mathcal{O}}_{X,P} & \hookrightarrow & L[\![\underline{x}-\underline{x}(P)]\!] \\ f & \longmapsto & \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\underline{\alpha}!}\frac{\partial^{\underline{\alpha}} f}{\partial \underline{x}^{\underline{\alpha}}}(P)\,(\underline{x}-\underline{x}(P))^{\underline{\alpha}} \end{array},$$

où L est une extension finie de K. On appelle G-fonction en P un élément f de $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$, qui satisfait les conditions suivantes :
(G) les coefficients des $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}(\underline{x}-\underline{x}(P))^{\underline{\alpha}}$ vérifient les conditions G_1) et G_2);
(H) f est rationnellement holonome, i.e. le $\mathcal{F}$-espace vectoriel engendré par $(\underline{D}^{\underline{\alpha}} f)_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ est un $\mathcal{F}/K$-module différentiel de dimension finie.

Remarque 3.2.
1) La notion de G-fonction est indépendante du choix des coordonnées étales et du corps K, d'ailleurs, quitte à étendre le corps K, on va supposer que P est un point K-rationnel et que $\underline{x}(P) = 0$.
2) Un élément f de $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ est rationnellement holonome si et seulement si la série $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ est rationnellement holonome sur $K(\underline{x})$, *i.e.* le $K(\underline{x})/K$-module différentiel engendré par $(\underline{D}^{\underline{\alpha}}\tau(f))_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ est un $K(\underline{x})$-espace vectoriel de dimension finie.

On veut maintenant caractériser la propriété (G) de facon plus quantitative; pour cela on va introduire la notion de taille d'une série formelle :

Définition 3.3. *Pour une série formelle $y = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]$, on définit la taille de y de la facon suivante :*

$$\sigma(y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} h(y,n,v)$$

où

$$h(y,n,v) = \sup_{|\underline{\alpha}|\le n} \left(\log^+ |a_{\underline{\alpha}}|_v\right) .$$

Proposition 3.4. *Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ et $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]$; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f *a la propriété* (G)*;*
2) $\sigma(\tau(f)) < +\infty$.

La démonstration de la dernière proposition dans le cas d'une variable (*cf.* [7, VIII, 1.1]) se généralise sans difficulté à l'énoncé qu'on vient de donner.

Remarque 3.5. Il est évident que le lien entre les G-fonctions et les modules différentiels de type G est très profond. En effet, considérons un X/K-module différentiel $(\mathcal{M}, \nabla)$ de type G. Soit $\underline{e}$ une base fixée de $\mathcal{M}$ sur X; on pose :

$$\nabla(D_i)\underline{e} = \underline{e}G_i \ , \ \text{pour tout } i = 1, \ldots, d.$$

On peut vérifier facilement que, si ξ est un point fermé de X, au voisinage de ξ on a :

$$D_i \left(\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} G_{\underline{\alpha}}(\xi)(\underline{x} - \underline{x}(\xi))^{\underline{\alpha}} \right) = \left(\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} G_{\underline{\alpha}}(\xi)(\underline{x} - \underline{x}(\xi))^{\underline{\alpha}} \right) G_i \ , \ \text{pour tout } i = 1, \ldots, d.$$

On en déduit que les composantes des vecteurs horizontaux de ∇ sur la base $\underline{e}$ (et donc sur toute base de $\mathcal{M}$) sont des G-fonctions.

Le théorème fondamental de ce papier, que nous allons énoncer dans la prochaine section, montre, en particulier, que le module différentiel engendré par une G-fonction est de type G.

4. Enoncé du théorème principal.

Théorème 4.1. *Soient* X *un* K*-schéma lisse connexe de dimension relative* d*, tel que* $\kappa(X) = \mathcal{F}$*,* $P \in X$ *un point fermé et* (M, ∇) *un* $\mathcal{F}/K$*-module différentiel. On considère le corps* $Frac(\hat{\mathcal{O}}_{X,P})$*; puisque* $\mathcal{O}_{X,P} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$*,* $Frac(\hat{\mathcal{O}}_{X,P})$ *a une structure naturelle de* $\mathcal{F}/K$*-module différentiel. Supposons que* (M, ∇) *a une solution injective (i.e. un morphisme injectif de modules à connexion)*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_\nabla \left(M, Frac\left(\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \right) \right)$$

et qu'il existe une base $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_\mu)$ *de* M *sur* $\mathcal{F}$ *ayant les propriétés :*
i) $\varphi(f_i) \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$,
ii) $\varphi(f_i)$ *a la propriété* (G) *pour tout* $i = 1, \ldots, \mu$*;*
alors (M, ∇) *est un module différentiel de type* G.

L'énoncé qui suit est équivalent au théorème (4.1) :

Théorème 4.2. *Soit* $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ *une* G*-fonction et soit* (M, ∇) *le* $\mathcal{F}/K$*-module différentiel engendré par* $(\underline{D}^{\underline{\alpha}} f)_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d}$*; alors* (M, ∇) *est un module différentiel de type* G.

En combinant (2.5) et (4.1), on obtient le corollaire :

Corollaire 4.3. *Sous les hypothèses du théorème (4.1), le module différentiel* (M, ∇) *est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont rationnels.*

La démonstration du théorème (4.1) fera l'objet de la section suivante.

5. Démonstration du théorème (4.1).

La démonstration de (4.1) est divisée en plusieurs étapes :
I. Réduction au cas d'un ouvert de l'espace affine.
II. Idée de la démonstration.
III. Une propriété des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.
IV. Inversibilité de la matrice $R^{<0>}$.
V. Construction des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.
VI. Première partie des estimations.
VII. Conclusion de la démonstration.

I. Réduction au cas d'un ouvert affine.

Quitte à restreindre X à un voisinage ouvert de P, il existe des coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ sur X telles que le morphisme associé à $\underline{x}$

$$g : X \longrightarrow g(X) \subset \mathbb{A}^d_K$$

est en effet un morphisme étale. Si on étend le corps de base K, on peut supposer que P est un point K-rationnel et que $\underline{x}(P) = 0$. Alors, on a un isomorphisme d'algèbres différentielles associé à g :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)} = K[\![\underline{x}]\!] \tag{5.0.1}$$

qui nous permet de regarder φ comme une solution injective de (M, ∇) en tant que $K(\underline{x})/K$-module différentiel :

$$\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_\nabla \left(M, Frac\left(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)}\right)\right) .$$

On veut montrer qu'il existe une base de M sur $K(\underline{x})$ telle que $\widetilde{\varphi}$ vérifie les hypothèses *i)* et *ii)* du théorème. Soit $i : \mathrm{Spec}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K(\underline{x}))$ le morphisme associé à l'injection $K(\underline{x}) \hookrightarrow \mathcal{F}$; étant donné que $\mathcal{F}$, muni de la connexion triviale, est un module différentiel de type G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{F})$, $i_*\mathcal{F}$ est un module différentiel de type G sur $\mathrm{Spec}(K(\underline{x}))$ (*cf.* [5, App. A]). L'injection

$$\mathcal{O}_{X,P} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)} = K[\![\underline{x}]\!] ,$$

obtenue de (5.0.1) par restriction, nous donne donc une solution injective de $\mathcal{F}$ muni de la connexion triviale. Il s'ensuit qu'il existe une base $\underline{u} = (u_1, \dots, u_\nu)$ de $\mathcal{F}$ sur K telle que les éléments de $\underline{u}$ satisfont les hypothèses *i)* et *ii)* de (4.1) (il suffit, en effet, de choisir u_i dans $\mathcal{O}_{X,P}$). Soit $\underline{f} = (f_1, \dots, f_\mu)$ une base de M sur $\mathcal{F}$ satisfaisant les mêmes hypothèses. On peut alors conclure que la base $(u_i f_j)_{1 \le i \le d, 1 \le j \le \mu}$ de M sur $K(\underline{x})$ satisfait aux hypothèses *i)* et *ii)* du théorème (4.1).

Supposons que l'on ait démontré le théorème (4.1) pour un sous-schéma ouvert de l'espace affine : alors (M, ∇) est un G-module en tant que $K(\underline{x})/K$-module différentiel, autrement dit il existe un diviseur Z de $g(X)$ de dimension pure 1 tel qu'il existe un module à connexion intégrable $(\mathcal{M}, \nabla)$ de type G sur $g(X) \smallsetminus Z$. Puisque g est génériquement fini il existe un ouvert dense U de X tel que la restriction $g_{|U} : U \longrightarrow g(U)$ est un revêtement étale. On peut supposer que $g(U) \subset g(X) \smallsetminus Z$. Alors $(g_{|U}^{*}\mathcal{M}_{|g(U)}, g_{|U}^{*}\nabla_{|g(U)})$, est un module différentiel de type G sur U (*cf.* [5, App. A]), dont la fibre générique est (M, ∇).

On en déduit qu'il suffit de démontrer le théorème (4.1) dans le cas d'un sous-schéma ouvert $X \subset \mathbb{A}_K^d$.

II. Idée de la démonstration.

5.1. Supposons alors que X est un sous-schéma ouvert de $\mathbb{A}_K^d$. On peut supposer que P est un point K-rationnel et qu'il existe des coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ sur X telles que $\underline{x}(P) = 0$. Etant donnée une base $\underline{f}$ de M sur $K(x)$ on pose :

$$\frac{1}{\underline{\alpha}!}\nabla\left(\underline{D}\right)^{\underline{\alpha}}\underline{f} = \underline{f}G_{\underline{\alpha}}\ ,\ \text{avec } G_{\underline{\alpha}} \in M_{\mu\times\mu}\left(K(x)\right).$$

On rappelle que les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ satisfont à la relation :

$$G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \frac{1}{\alpha_i+1}\left(G_{\underline{1}_i}G_{\underline{\alpha}} + D_iG_{\underline{\alpha}}\right)\ ,\ \forall\ \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d.$$

Par hypothèse on peut choisir $\underline{f}$ de facon que $(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_\mu)) = (y_0, \ldots, y_{\mu-1}) \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ a les propriétés suivantes :
- $D_i(y_0, \ldots, y_{\mu-1}) = (y_0, \ldots, y_{\mu-1})G_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$;
- $y_0, \ldots, y_{\mu-1}$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$;
- $\sigma(y_i) < \infty$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu-1$.

On a donc :

$$\frac{D^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{\mu-1}\end{pmatrix} = {}^tG_{\underline{\alpha}}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{\mu-1}\end{pmatrix}\ ,\ \text{pour tout } \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d,$$

où ${}^tG_{\underline{\alpha}}$ est la matrice transposée de $G_{\underline{\alpha}}$.

Notations 5.2. Pour simplifier les notations, on écrira $G_{\underline{\alpha}}$ au lieu de ${}^tG_{\underline{\alpha}}$; alors le vecteur $\overrightarrow{y} = {}^t\left(y_0, \ldots, y_{\mu-1}\right)$ est solution de

$$\frac{D^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\overrightarrow{y} = G_{\underline{\alpha}}\overrightarrow{y}\ ,\ \text{pour tout } \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d,$$

et les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ vérifient la relation :

$$G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \frac{1}{\alpha_i+1}\left(G_{\underline{\alpha}}G_{\underline{1}_i} + D_iG_{\underline{\alpha}}\right)\ ,\ \forall\ \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d.$$

On note Λ_i, $i = 1, \ldots, d$, l'opérateur matriciel suivant :

$$\Lambda_i = D_i - G_{\underline{1}_i}(\underline{x}) \ .$$

On remarque que les opérateurs $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$ commutent entre eux deux à deux et que si $\mathcal{Y}$ est une matrice inversible à coefficients dans une extension différentielle $\mathcal{G}$ de $K(\underline{x})$ telle que $\Lambda_i(\mathcal{Y}) = 0$, on a :

$$\Lambda_i = \mathcal{Y} \circ D_i \circ \mathcal{Y}^{-1} \ , \ \forall\, i = 1, \ldots, d \ .$$

Etant donné $\overrightarrow{P} \in K[\underline{x}]^\mu$, on définit :

$$\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \frac{\Lambda^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\overrightarrow{P} = \prod_{i=1}^{d} \frac{\Lambda_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}\overrightarrow{P} = \mathcal{Y}\frac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left(\mathcal{Y}^{-1}\overrightarrow{P}\right) \ .$$

Lemme 5.3.

(5.3.1)
$$G_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \circ \Lambda^{\underline{\beta}} \ ,$$

(5.3.2)
$$G_{\underline{\alpha}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}} = \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!}\underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})}\binom{\underline{\gamma}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}}R_{\underline{\gamma}+\underline{\beta}} \ , \ \textit{pour tout } \underline{\alpha}, \underline{\gamma} \in \mathbb{N}^d.$$

Démonstration. On démontre d'abord la formule (5.3.1). On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \circ \Lambda^{\underline{\beta}} &= \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \circ \mathcal{Y} \circ \underline{D}^{\underline{\beta}} \circ \mathcal{Y}^{-1} \\
&= \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\left(\sum_{\underline{\gamma} \leq \underline{\alpha}-\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}}\underline{D}^{\underline{\gamma}}\mathcal{Y}\right)\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}-\underline{\gamma}} \circ \underline{D}^{\underline{\beta}} \circ \mathcal{Y}^{-1} \\
&= \sum_{\substack{\underline{\gamma} \leq \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \leq \underline{\alpha}-\underline{\gamma}}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}}(\underline{D}^{\underline{\gamma}}\mathcal{Y}) \circ \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\gamma}} \circ \mathcal{Y}^{-1} \ .
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}-\underline{\gamma}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} = \frac{1}{\underline{\gamma}!(\underline{\alpha}-\underline{\gamma})!}\sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}-\underline{\gamma}}(-1)^{|\underline{\beta}|}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\gamma}}{\underline{\beta}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{\alpha}!} & \text{si } \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc :

$$\sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \circ \Lambda^{\underline{\beta}} = \frac{1}{\underline{\alpha}!}(\underline{D}^{\underline{\alpha}}\mathcal{Y}) \circ \mathcal{Y}^{-1} = G_{\underline{\alpha}}\mathcal{Y}\mathcal{Y}^{-1} = G_{\underline{\alpha}} \ .$$

On démontre maintenant la formule (5.3.2). Pour tout $\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^d$ on a :

$$\begin{aligned} G_{\underline{\alpha}} \vec{R}_{\underline{\gamma}} &= \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!} \binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \Lambda^{\underline{\beta}} \vec{R}_{\underline{\gamma}} \\ &= \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})} \binom{\underline{\gamma}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} \vec{R}_{\underline{\gamma}+\underline{\beta}} . \end{aligned}$$

■

Remarque 5.4. Pour démontrer que (M, ∇) est un module différentiel de type G, on doit estimer les matrices $G_{\underline{\alpha}}$. Pour cela on développera la démonstration dans deux directions :
1) d'un coté on va établir une relation entre $\vec{R}_{\underline{\beta}}$ et $\vec{P}$ qui nous permettra d'estimer la valeur de ces vecteurs;
2) de l'autre coté on va démontrer que, sous des hypothèses convenables sur $\vec{P}$, il existe $\underline{\gamma}_0, \dots, \underline{\gamma}_{\mu-1} \in \mathbb{N}^d$ tels que la matrice $R^{<0>} = \left(\vec{R}_{\underline{\gamma}_0}, \vec{R}_{\underline{\gamma}_1}, \dots, \vec{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$ est inversible, car, d'après le dernier lemme, les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ vérifient la formule :

$$G_{\underline{\alpha}} R^{<0>} = \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})} R^{<\underline{\beta}>} , \tag{5.4.1}$$

où :

$$R^{<\underline{\beta}>} = \left(\binom{\underline{\gamma}_0+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_0} \vec{R}_{\underline{\gamma}_0+\underline{\beta}}, \binom{\underline{\gamma}_1+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_1} \vec{R}_{\underline{\gamma}_1+\underline{\beta}}, \dots, \binom{\underline{\gamma}_{\mu-1}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_{\mu-1}} \vec{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}+\underline{\beta}} \right) .$$

III. Une propriété des approximants de Hermite-Padé de $\vec{y}$.

Notations 5.5. Etant donné un polynôme

$$p(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} p_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]$$

on pose :

$$\deg_{\underline{x}} p(\underline{x}) = \max\{|\underline{\alpha}| : \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d \text{ et } p_{\underline{\alpha}} \neq 0\} .$$

Pour un vecteur $\vec{P} = {}^t(P_0, \dots, P_{\mu-1}) \in K[\underline{x}]^\mu$ on utilisera la notation :

$$\deg_{\underline{x}} \vec{P} = \sup_{i=0,\dots,\mu-1} \deg_{\underline{x}} P_i .$$

Pour $\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \vec{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ on pose :

$$\left(\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \vec{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \right)_{\leq N} = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq N} \vec{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \vec{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \right)_{> N} = \sum_{|\underline{\alpha}| > N} \vec{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} .$$

Soit $((x_1, \ldots, x_d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration de $K[\underline{x}]$ associée à l'idéal $(x_1, \ldots, x_d)$. On appelle $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\underline{x}} \ : K[\underline{x}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ p(\underline{x}) &\longmapsto \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ p(\underline{x}) \in (x_1, \ldots, x_d)^n\} \ . \\ 0 &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

Evidemment la fonction $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ satisfait les axiomes de valuation :

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_{\underline{x}}\,(p_1(\underline{x})p_2(\underline{x})) = \mathrm{ord}_{\underline{x}}p_1(\underline{x}) + \mathrm{ord}_{\underline{x}}p_2(\underline{x}) \\ \mathrm{ord}_{\underline{x}}\,(p_1(\underline{x}) + p_2(\underline{x})) \geq \min\left(\mathrm{ord}_{\underline{x}}p_1(\underline{x}), \mathrm{ord}_{\underline{x}}p_2(\underline{x})\right) \end{cases} , \forall p_1(x), p_2(x) \in K[\underline{x}]$$

et donc on peut étendre $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ à $K(\underline{x})$ en posant :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} = \mathrm{ord}_{\underline{x}}p(\underline{x}) - \mathrm{ord}_{\underline{x}}q(\underline{x}) \ .$$

On peut aussi étendre $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ au complété $(x_1, \ldots, x_d)$-adique $K[\![\underline{x}]\!]$ de $K[\underline{x}]$. Les plongements naturels de $K(\underline{x})$ et de $K[\![\underline{x}]\!]$ dans le corps des fractions $Frac\,(K[\![\underline{x}]\!])$ sont compatibles avec la définition de $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$. De plus, pour un vecteur $\overrightarrow{P} = {}^t(P_0, \ldots, P_{\mu-1})$ on pose :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{P} = \inf_{i=0,\ldots,\mu-1} \mathrm{ord}_{\underline{x}}P_i \ .$$

Dans la suite on utilisera la propriété de $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ suivante :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}}\,(D_i p(\underline{x})) \geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}p(\underline{x}) - 1 \ , \ \forall\ i = 1, \ldots, d.$$

Proposition 5.6. *Soient $Q \in \mathcal{V}_K[\underline{x}] \smallsetminus \{0\}$, tel que $Q(\underline{x})G_{\underline{1}_i}(\underline{x}) \in M_{\mu\times\mu}(K[\underline{x}])$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, et*

$$t = 1 + \sup_{i=1,\ldots,d} \left(\deg_{\underline{x}}\left(Q(\underline{x})G_{\underline{1}_i}(\underline{x})\right), \deg_{\underline{x}} Q(\underline{x}) - 1\right) \ .$$

Soient $N \in \mathbb{N}$ et κ un nombre réel positif. On se donne un polynôme $q \in K[\underline{x}]$ tel que

$$\deg_{\underline{x}} q \leq N \tag{5.6.1}$$

et

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}}\,(q\overrightarrow{y})_{>N} \geq 1 + N + \kappa N \ . \tag{5.6.2}$$

On pose $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N}$. Alors, pour N assez grand, pour $\overrightarrow{P} \neq 0$ et pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ tel que :

$$|\underline{\alpha}| < \frac{N}{t}\kappa \ ,$$

on a :

$$Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,\overrightarrow{y}\right)_{\leq N+|\underline{\alpha}|(t-1)} . \tag{5.6.3}$$

Démonstration. On remarque d'abord que, pour N assez grand, $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N} = q\overrightarrow{y} - (q\overrightarrow{y})_{>N} \neq 0$; en effet si, par l'absurde, $\overrightarrow{P} = 0$, alors $q\overrightarrow{y} = (q\overrightarrow{y})_{>N}$ et donc :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} q\overrightarrow{y} \geq 1 + N + \kappa N .$$

Comme $\deg_{\underline{x}} q \leq N$, on en déduit que :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \overrightarrow{y} \geq \kappa N ;$$

on obtient une contradiction, car $\overrightarrow{y}$ ne dépend pas de N.

Pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} = \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,\overrightarrow{y} - Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} .$$

On a l'égalité :

$$(\alpha_i+1)\,\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \left(QD_i - |\underline{\alpha}|D_iQ - QG_{\underline{1}_i}\right)\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} ,$$

puisque :

$$\begin{aligned}
QD_i\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} &= Q\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i}q\right)\overrightarrow{y} + \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{y} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}\,(D_iQ)\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,\overrightarrow{y}\right) \\
&\quad - Q\left(Q^{|\underline{\alpha}|}D_i\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}\,(D_iQ)\,\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right) \\
&= Q\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i}q\right)\overrightarrow{y} + \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{y} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}\,(D_iQ)\,(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q)\,\overrightarrow{y}\right) \\
&\quad - Q\left(Q^{|\underline{\alpha}|}(\alpha_i+1)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} + Q^{|\underline{\alpha}|}G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}\,(D_iQ)\,\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right) \\
&= (\alpha_i+1)\,\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} + QG_{\underline{1}_i}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|\,(D_iQ)\,\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} ,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} &\geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}-\underline{1}_i} - 1 \geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_0 - |\underline{\alpha}| \\
&\geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}\left(q\overrightarrow{y} - (q\overrightarrow{y})_{\leq N}\right) - |\underline{\alpha}| \geq 1 + N + \kappa N - |\underline{\alpha}| \\
&> 1 + N + |\underline{\alpha}|(t-1) .
\end{aligned}$$

On obtient le résultat cherché grâce au lemme suivant :

Lemme 5.7. *Soient Q et t comme dans la proposition précédente. Alors, pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, on a :*

$$Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]^{\mu}$$

et :

$$\deg_{\underline{x}}\left(Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right) \le \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{P} + |\underline{\alpha}|(t-1)\ .$$

Démonstration. On pose $\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} = Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$. Par hypothèse on a $\overrightarrow{H}_{\underline{0}} = \overrightarrow{R}_{\underline{0}} = \overrightarrow{P} \in K[\underline{x}]^\mu$. On conclut en raisonnant par récurrence car :

$$\begin{aligned}(\alpha_i+1)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} &= \Lambda_i\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \left(D_i - G_{\underline{1}_i}\right)\frac{\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}}}{Q^{|\underline{\alpha}|}}\\ &= \frac{(D_i\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}})Q - |\underline{\alpha}|\,(D_iQ)\,\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} - QG_{\underline{1}_i}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}}}{Q^{|\underline{\alpha}|+1}}\ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\deg_{\underline{x}}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} \le \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}-\underline{1}_i} + (t-1) \le \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{P} + |\underline{\alpha}|(t-1)\ .$$

■

IV. Inversibilité de la matrice $R^{<0>}$.

L'objet de cette section est le développement du deuxième point de (5.4). On remarque que dans le cas d'un module différentiel irréductible l'existence d'une matrice inversible de la forme $R^{<0>}$ ne nécessite pas d'hypothèse sur le vecteur $\overrightarrow{P}$ et elle se vérifie de facon élémentaire[(4)].

Théorème 5.8. *Soit $\overrightarrow{y}(\underline{x}) = (y_0(\underline{x}),\dots,y_{\mu-1}(\underline{x}))^t \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ un vecteur solution de $\Lambda_iY=0$, pour tout $i=1,\dots,d$, tel que $y_0(\underline{x}),\dots,y_{\mu-1}(\underline{x})$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$.*

Il existe une constante $C(\Lambda)$, ne dépendant que de Λ_i, $i=1,\dots,d$, telle que si

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_0\\ \vdots\\ P_{\mu-1}\end{pmatrix} \in K[\underline{x}]^\mu \smallsetminus \{\underline{0}\}$$

---

(4) Soient $\mathcal{Z}\in Gl(\mu,\mathcal{G})$ une matrice inversible à coefficients dans une extension différentielle $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, telle que :

$$D_i\mathcal{Z}+{}^tG_i\mathcal{Z}=0\ ,\ \text{pour tout } i=1,\dots,d,$$

et $\vec{P}={}^t(P_0,\dots,P_{\mu-1})\in K[\underline{x}]^\mu$. Alors la matrice ${}^t\mathcal{Z}^{-1}$ est telle que $(D_i-G_i)\left({}^t\mathcal{Z}^{-1}\right)=0$, pour tout $i=1,\dots,d$, et :

$$\vec{R}_{\underline{\alpha}}={}^t\mathcal{Z}^{-1}\frac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left({}^t\mathcal{Z}\vec{P}\right)$$

On veut montrer que, si le module différentiel (M,∇) est irréductible, la matrice $(\vec{R}_{\underline{\alpha}})_{|\underline{\alpha}|\le\mu-1}$ a rang maximal μ pour tout $\vec{P}\in K[\underline{x}]^\mu$. En effet, s'il existe $\vec{P}$ tel que la matrice $(\vec{R}_{\underline{\alpha}})_{|\underline{\alpha}|\le\mu-1}$ n'a pas rang maximal, il en est de même de la matrice wronskienne

$${}^t\vec{R}_{\underline{\alpha}}\mathcal{Z}=\frac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left({}^t\vec{P}\mathcal{Z}\right)\ .$$

Alors les entrées du vecteur ${}^t\vec{P}\mathcal{Z}\in\mathcal{G}^\mu$ sont linéairement dépendantes sur les corps des constantes C de $\mathcal{G}$ (*cf.* Appendice B) : il existe donc un vecteur de solutions $\vec{z}$ du systeme $(D_i+{}^tG_i)_{i=1,\dots,d}$ à coefficients dans $\mathcal{G}$ tel que ${}^t\vec{P}\vec{z}=0$. On en déduit que le module différentiel dual de (M,∇) (et donc (M,∇)) est réductible (*cf.* [6, VIII, 2.6]).

a la propriété suivante :

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} P_i & P_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \geq \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P}(\underline{x}) + C(\Lambda) \ , \forall i, j = 0, \ldots, \mu - 1, \tag{5.8.1}$$

alors la matrice $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu - 1}$ *a rang maximal* μ.

Remarque 5.9. On observe que, si on choisit q et $\overrightarrow{P}$ comme dans (5.6), pour N assez grand, on a :

$$\kappa N \geq C(\Lambda)$$

et donc la condition (5.8.1) est satisfaite, car :

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} P_i & P_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} = \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} (qy_i)_{>N} & (qy_j)_{>N} \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \geq 1 + N + \kappa N \ .$$

Pour terminer la démonstration de (4.1) il suffit, alors, de déterminer un polynôme q convenable et d'estimer les matrices $G_{\underline{\alpha}}$.

On a d'abord besoin d'une définition :

Définition 5.10. *On appelle degré total de* $\frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} \in K(\underline{x})$ *l'entier positif ou nul :*

$$\deg \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} = \deg_{\underline{x}} p(\underline{x}) + \deg_{\underline{x}} q(\underline{x}) \ .$$

Le lemme suivant est une version dans le cas de plusieurs variables d'un lemme de Schidlovsky :

Lemme 5.11. *Soit* $\mathcal{G}/K(\underline{x})$ *une extension de corps et soit* $V \subset \mathcal{G}$ *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Alors le degré total des éléments de* $K(\underline{x})$ *qu'on peut écrire comme quotient de deux éléments de* V *est borné.*

Démonstration. Soit $\widetilde{V}$ le $K(\underline{x})$-espace vectoriel engendré par V. On considère une K-base $(\eta_1, \ldots, \eta_t)$ de V, telle que $(\eta_1, \ldots, \eta_l)$, pour $l \leq t$, est une $K(\underline{x})$-base de $\widetilde{V}$. Alors il existe $A_{l+j,i} \in K(\underline{x})$, pour $j = 1, \ldots, t-l$ et $i = 1, \ldots, l$, tels que :

$$\eta_{l+j} = \sum_{i=1}^{l} A_{l+j,i} \eta_i \ , \ \forall \ j = 1, \ldots, t - l. \tag{5.11.1}$$

Soit $h \in K(\underline{x})$ tel que $h = \xi/\eta$, avec $\xi, \eta \in V$ et $\eta \neq 0$. On a :

$$\xi = h\eta = h \sum_{i=1}^{t} v_i \eta_i = \sum_{i=1}^{t} w_i \eta_i \ ,$$

pour des $v_i, w_i \in K$ convenables. Grâce à (5.11.1), pour tout $i = 1, \ldots, l$, on obtient :

$$h\left(v_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} v_{l+j}\right) = w_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} w_{l+j} \ .$$

Comme on a supposé $\eta \neq 0$, il existe $i = 1, \ldots, l$ tel que $v_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} v_{l+j} \neq 0$; on en déduit que le degré total de h est borné, pour tout $h \in K(\underline{x})$ que l'on peut écrire comme quotient de deux éléments de V, par une constante dépendant seulement des $A_{l+j,i}$. ■

Démonstration du théorème (5.8). Soit $\mathcal{G}$ une extension différentielle de $K(\underline{x})$, telle qu'il existe une matrice $\mathcal{Z} \in Gl(\mu, \mathcal{G})$ solution de $D_i \mathcal{Z} + {}^tG_i \mathcal{Z} = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, d$, et soit C le corps des constantes de $\mathcal{G}$ par rapport aux dérivations $(D_1, \ldots, D_d)$. On remarque que ${}^t\mathcal{Z}^{-1}$ est une solution du système différentiel $\Lambda_i Y = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, d$.

On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{G}^\mu & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & \begin{pmatrix} T_0 \\ \vdots \\ T_{\mu-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i-0}^{\mu-1} P_i T_i \ . \end{array}$$

La matrice de Φ dans la base de $\mathcal{G}^\mu$ associée à la matrice $\mathcal{Z}$ est donnée par

$$\underline{w} = (w_0, \ldots, w_{\mu-1}) = {}^t\overrightarrow{P}\mathcal{Z}$$

et par définition de $\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$ on a :

$$(5.11.2) \qquad {}^t\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \mathcal{Z} = \left(\tfrac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{D}^{\underline{\alpha}} \underline{w}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \ .$$

Etant donné que la matrice de droite est, à multiplication par une matrice diagonale près, une matrice wronskienne, la matrice $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1}$ n'a pas rang maximal μ si et seulement si $w_0, \ldots, w_{\mu-1}$ sont linéairement dépendants sur C (*cf.* Appendice B); de plus on a :

$$\nu = \text{rang } \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} = \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} C w_i \ .$$

Soit $(\widetilde{w}_0, \ldots, \widetilde{w}_{\nu-1})$ une base de $\sum_{i=0}^{\mu-1} C w_i$ telle que

$$(\, w_0 \quad w_1 \quad \ldots \quad w_{\mu-1}\,)\, M = (\, \widetilde{w}_0 \quad \widetilde{w}_1 \quad \ldots \quad \widetilde{w}_{\nu-1} \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,) \ , \text{ avec } M \in Gl(\mu, C).$$

La matrice $\mathcal{Z}M$ est encore une solution de l'operateur différentiel $D_i + {}^tG_i$ et, donc, on peut utiliser $\mathcal{Z}M$ au lieu de $\mathcal{Z}$ dans (5.11.2). Pour simplifier les notations on écrira $\mathcal{Z}$ pour $\mathcal{Z}M$; on obtient :

$${}^t\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \mathcal{Z} = \left(\, \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_0 \quad \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_1 \quad \ldots \quad \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_{\nu-1} \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \ .$$

Soit $R^{<0>} = \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0}, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1}, \ldots, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$ une sous-matrice carrée de $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}|\leq\mu-1}$. On introduit les notations suivantes :

$$R^{<0>} = \begin{pmatrix} R_{IJ} & R_{IJ'} \\ R_{I'J} & R_{I'J'} \end{pmatrix} \text{ et } {}^t\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{JS} & \mathcal{Z}_{JS'} \\ \mathcal{Z}_{J'S} & \mathcal{Z}_{J'S'} \end{pmatrix} ,$$

où $I = J = S = \{0, 1, \ldots, \nu - 1\}$ et $I' = J' = S' = \{\nu, \ldots, \mu - 1\}$. Quitte à changer l'ordre de $\underline{\gamma}_0, \ldots, \underline{\gamma}_{\mu-1}$ et de $P_0, \ldots, P_{\mu-1}$, on peut supposer que la matrice R_{IJ} a rang maximal. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{JS} & \mathcal{Z}_{JS'} \\ \mathcal{Z}_{J'S} & \mathcal{Z}_{J'S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{IJ} & R_{IJ'} \\ R_{I'J} & R_{I'J'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

avec A matrice $\nu \times \mu$, et donc :

$$\mathcal{Z}_{J'S} R_{IJ} + \mathcal{Z}_{J'S'} R_{I'J} = 0 .$$

Soit $B = R_{I'J} R_{IJ}^{-1}$. Comme $R^{<0>} \in M_{\mu\times\mu}(K(\underline{x}))$, $B \in M_{\mu-\nu,\nu}(K(\underline{x}))$. Puisque $R^{<0>}$ ne change pas si on remplace $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{Z}M$, il en est de même de B. Etant donné que $\mathcal{Z}$ est une matrice inversible et que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{J'S} & \mathcal{Z}_{J'S'} \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_{J'S'} \begin{pmatrix} -B & I_{\mu-\nu} \end{pmatrix} ,$$

la matrice $\mathcal{Z}_{J'S'}$ est inversible et on obtient :

$$B = -\mathcal{Z}_{J'S'}^{-1} \mathcal{Z}_{J'S} .$$

Les coefficients de la matrice B peuvent s'écrire sous la forme ξ/η, où ξ et η sont des éléments du K-espace vectoriel des polynômes de degré au plus $\mu - \nu$ à coefficients dans K en les entrées de la matrice $\mathcal{Z}$. D'après le lemme précédent, le degré total des éléments de la matrice B est borné par une constante ne dépendant que de $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d)$, puisque M est une matrice à coefficients dans le corps des constantes C.

On considère maintenant les deux matrices :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} y_{\mu-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \in M_{\nu\times\nu}(K[\![\underline{x}]\!])$$

et

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -y_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{\nu\times\mu-\nu}(K[\![\underline{x}]\!])$$

et on pose :

$$T = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{IJ} \\ R_{I'J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_\nu \\ B \end{pmatrix} R_{IJ} .$$

Soit $(b_0, \ldots, b_{\nu-1})$ la dernière ligne de B. On a :

$$\begin{aligned}
\det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) &= \det\left(Q_1 + Q_2 B\right) \\
&= \det \begin{pmatrix} y_{\mu-1} - y_0 b_0 & -y_0 b_1 & -y_0 b_2 & \cdots & -y_0 b_{\nu-1} \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} y_{\mu-1} - y_0 b_0 - y_1 b_1 - \cdots - y_{\nu-1} b_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \\
&= (-y_0)^{\nu-1}\left(y_{\mu-1} - y_0 b_0 - y_1 b_1 - \cdots - y_{\nu-1} b_{\nu-1}\right) .
\end{aligned}$$

On remarque que $\det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) \neq 0$, car par hypothèse $y_0, \ldots, y_{\mu-1}$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$. On va trouver une contradiction en déterminant des bornes inférieure et supérieure de $\mathrm{ord}_{\underline{x}} \det\left(TR_{IJ}^{-1}\right)$.

Etant donné que le degré total des éléments de la matrice B est borné par une constante ne dépendant que de $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$, on obtient l'existence d'une constante C_1, dépendant du système différentiel et indépendant de $\overrightarrow{P}$, telle que

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) \leq C_1 .$$

Maintenant, on va chercher une borne inférieure. Soient

$$\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = {}^t\left(R_{\underline{\alpha},0}, R_{\underline{\alpha},2}, \ldots, R_{\underline{\alpha},\mu-1}\right) \text{ , pour tout } \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d,$$

de facon que :

$$R^{<0>} = \left(R_{\underline{\gamma}_i,j}\right)_{i,j\in\{0,1,\ldots,\mu-1\}^2} ,$$

et :

$$G_{\underline{1}_h} = \left(G_{i,j}^h\right)_{i,j\in\{0,1,\ldots,\mu-1\}^2} .$$

Les éléments de la première ligne de T sont de la forme

$$\det\begin{pmatrix} y_{\mu-1} & R_{\underline{\gamma}_s,\mu-1} \\ y_0 & R_{\underline{\gamma}_s,0} \end{pmatrix} \text{ , pour } s = 0, \ldots, \nu-1,$$

et ceux de la i-ième ligne, pour $i = 1, \ldots, \nu-1$:

$$\det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\gamma}_s,i} \\ y_0 & R_{\underline{\gamma}_s,0} \end{pmatrix} \text{ , pour } s = 0, \ldots, \nu-1.$$

D'après les relations de récurrence qui lient les vecteurs $\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$ on obtient :

$$D_h \det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha},i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha},j}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sum_l G^h_{i,l} y_l & R_{\underline{\alpha},i} \\ \sum_l G^h_{j,l} y_l & R_{\underline{\alpha},j}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_i & D_h R_{\underline{\alpha},i} \\ y_j & D_h R_{\underline{\alpha},j}\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \sum_l G^h_{i,l} y_l & R_{\underline{\alpha},i} \\ \sum_l G^h_{j,l} y_l & R_{\underline{\alpha},j}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_i & \sum_l G^h_{i,l} R_{\underline{\alpha},l} \\ y_j & \sum_l G^h_{j,l} R_{\underline{\alpha},l}\end{pmatrix} + (\alpha_h+1)\det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_l G^h_{i,l} \det\begin{pmatrix} y_l & R_{\underline{\alpha},l} \\ y_j & R_{\underline{\alpha},j}\end{pmatrix} + \sum_l G^h_{j,l} \det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha},i} \\ y_l & R_{\underline{\alpha},l}\end{pmatrix} + (\alpha_h+1)\det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j}\end{pmatrix} ,$$

d'où, par récurrence sur $|\underline{\alpha}|$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\inf_{i,j=0,\ldots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j}\end{pmatrix} \\ \geq (|\underline{\alpha}|+1) \inf_{h=1,\ldots,d}(-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \inf_{i,j=0,\ldots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et enfin que :

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det T \geq \left(\sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i|\right) \inf_{h=1,\ldots,d}(-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \nu \inf_{i,j=0,\ldots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j\end{pmatrix} .$$

D'après (5.7), on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det R_{I,J} &\leq \deg_{\underline{x}} (\text{numérateur de } \det R_{I,J}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\nu-1} \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{H}_{\underline{\gamma}_i} \\ &\leq \nu \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} + (t-1)\sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i| \\ &\leq \nu \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} + (t-1)\nu(\mu-1) .\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\left(TR^{-1}_{I,J}\right) &\geq \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det(T) - \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det(R_{I,J}) \\ &\geq \left(\sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i|\right) \inf_{h=1,\ldots,d}(-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \nu\left(\inf_{i,j=0,\ldots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j\end{pmatrix}\right. \\ &\qquad \left. - \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} - (t-1)(\mu-1)\right) \\ &\geq \nu\left(\inf_{i,j} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j\end{pmatrix} - \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P}\right) + C_2 ,\end{aligned}$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$. Alors il suffit de choisir une constante $C(\Lambda)$ assez grande pour obtenir une contradiction. ∎

V. Construction des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.

Notations 5.12. Pour $q = \sum_{\underline{\alpha}} q_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]$ on pose :

$$h(q,v) = \sup_{\underline{\alpha}} \log^+ |q_{\underline{\alpha}}|_v \ , \ \forall\ v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$$

et

$$h(q) = \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} h(q,v) \ .$$

Pour $\overrightarrow{y} = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ on pose :

$$\widetilde{h}(n,v) = \sup_{|\underline{\alpha}| \leq n} \log^+ |\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v \ , \ \forall\ v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty \ ,$$

où $|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v$ est le maximum des valeurs absolues v-adiques des entrées de $\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}$.

On a la proposition suivante :

Proposition 5.13. *Pour $\tau \in (0,1)$ fixé, pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand et pour toute constante*

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu} + 1\right)^{1/d} - 1 \ ,$$

il existe $q \in K[\underline{x}]$ tel qu'on ait :

(5.13.1) $$\deg_{\underline{x}} q \leq N \ ,$$

(5.13.2) $$\mathrm{ord}_{\underline{x}} (q\overrightarrow{y})_{>N} \geq 1 + N + \kappa N$$

et

(5.13.3) $$h(q) \leq const + \frac{1-\tau}{\tau} \left(d \log N + \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N + \kappa N, v) \right) \ ,$$

De plus, si on pose $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N} = q\overrightarrow{y} - (q\overrightarrow{y})_{>N}$, alors, pour N assez grand, $\overrightarrow{P}$ est non nul et (5.8.1) est vérifiée.

Démonstration. On cherche $q \in K[\underline{x}]$ tel que les conditions (5.13.1) et (5.13.2) sont vérifiées. Soient

$$q = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq N} q_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \text{ et } \overrightarrow{y} = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \ ;$$

alors

$$q\overrightarrow{y} = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}\left(\sum_{\substack{\underline{\beta}+\underline{\gamma}=\underline{\alpha}\\ |\underline{\beta}|\le N}} q_{\underline{\beta}}\overrightarrow{y}_{\underline{\gamma}}\right)\underline{x}^{\underline{\alpha}}.$$

La condition (5.13.2) se traduit par le système linéaire suivant :

$$\text{(5.13.4)}\qquad \left\{\sum_{\substack{\underline{\beta}+\underline{\gamma}=\underline{\alpha}\\ |\underline{\beta}|\le N}} q_{\underline{\beta}}\overrightarrow{y}_{\underline{\gamma}} = 0\ \text{, pour tout } |\underline{\alpha}| = N+1,\dots,N+\kappa N.\right.$$

On va vérifier que, pour N assez grand, (5.13.4) admet une solution non-triviale. On note I le nombre d'inconnues et E le nombre d'équations. En appliquant la formule :

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r-1} + \ldots + \binom{r-1}{r-1}\ ,\ \forall\, n \ge r-1 \ge 0\ ,$$

on a :

$$\begin{aligned}
E &= \mu\left(\sum_{k=0}^{N+\kappa N}\binom{d-1+k}{d-1} - \sum_{k=0}^{N}\binom{d-1+k}{d-1}\right)\\
&= \mu\left(\binom{d+N+\kappa N}{d} - \binom{d+N}{d}\right)\\
&= \mu\frac{(1+\kappa)^d-1}{d!}N^d + (\text{termes de degré inférieur en } N)\ ,
\end{aligned}$$

et :

$$I = \sum_{k=0}^{N}\binom{d-1+k}{d-1} = \binom{N+d}{d} = \frac{N^d}{d!} + (\text{termes de degré inférieur en } N)\ .$$

Le système a une solution non-triviale si la condition $I > E$ est vérifiée, donc, pour N assez grand, si on a :

$$\mu\frac{(1+\kappa)^d-1}{d!} < \frac{1-\tau}{d!}\ ,$$

ou de facon équivalente :

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d} - 1\ .$$

D'après le lemme de Siegel on peut trouver une solution non nulle de (5.13.4) telle que :

$$h(q) \le const + \frac{E}{I-E}\left(\log(const) + \log I + \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty}\widetilde{h}\,(N+\kappa N, v)\right)\ .$$

Pour $N >> 0$:

$$\frac{E}{I-E} \le \frac{1-\tau}{\tau}\ .$$

En résumant, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} h(q) &\leq const + \frac{1-\tau}{\tau}\left(\log(const) + \log I + \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N+\kappa N, v)\right) \\ &\leq const + \frac{1-\tau}{\tau}\left(d\log N + \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N+\kappa N, v)\right)\ , \end{aligned}$$

où la constante dépend de τ et de d.

La dernière affirmation de (5.13) est démontrée dans (5.9). ■

VI. Première partie des estimations.

Notations 5.14. Pour tout $v \in \Sigma_f$ et tout $\frac{\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}} b_{\underline{\beta}}\underline{x}^{\underline{\beta}}} \in K(\underline{x})$, on définie la norme suivante :

$$\left|\frac{\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}} b_{\underline{\beta}}\underline{x}^{\underline{\beta}}}\right|_{v,Gauss} = \frac{\sup_{\underline{\alpha}} |a_{\underline{\alpha}}|_v}{\sup_{\underline{\beta}} |b_{\underline{\beta}}|_v}\ .$$

On rappelle qu'on a supposé par hypothèse que

$$\sigma(\overrightarrow{y}\,) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}(n,v)\right) < +\infty$$

et qu'on veut démontrer que

$$\sigma(M) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f} h(M,n,v)\right) < \infty\ ,$$

avec :

$$h(M,n,v) = \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d\\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|G_{\underline{\alpha}}\right|_{v,Gauss}\ .$$

On va introduire les notations :

$$y = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}\ ,\ \text{avec } \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}} \in K^\mu,$$

$$\sigma_f\,(\overrightarrow{y}\,) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f} \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d\\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}\right|_v\right)\ ,$$

$$\sigma_\infty\,(\overrightarrow{y}\,) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_\infty} \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d\\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}\right|_v\right)\ .$$

Dans la suite on notera q un polynôme construit selon la proposition (5.13). On remarque que, pour un tel choix de q et pour $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N}$, la formule (5.4.1) est vraie et les hypothèses de (5.6) et (5.8) sont vérifiées.

Proposition 5.15. *Dans les notations introduites on a :*

$$\sigma(M) \leq \sigma_f(\overrightarrow{y}) \left(\frac{\mu t}{\kappa} + (t-1)\right) + \Omega \ ,$$

où κ est une constante positive telle que :

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu} + 1\right)^{1/d} - 1$$

et

$$\Omega = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\mu \sum_{v \in \Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v \in \Sigma_f} \log \left| Q(\underline{x})^{\sum_{i=0}^{\mu-1} |\underline{\gamma}_i|} \Delta(\underline{x}) \right|_{X,v}^{-1} \right) \ ,$$

avec $\underline{\gamma}_0, \ldots, \underline{\gamma}_{\mu-1} \in \mathbb{N}^d$, tels que $|\underline{\gamma}_i| \leq \mu - 1$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu-1$.

Démonstration. On fixe $N, n >> 0$ tels que :

$$N > \frac{t}{\kappa}(n + \mu - 1) > \frac{t}{\kappa} n \ . \tag{5.15.1}$$

D'après (5.6), pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{\alpha}| \leq n + \mu - 1$, on a :

$$\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!} \left(D^{\underline{\alpha}} q\right) \overrightarrow{y} \right)_{\leq N + |\underline{\alpha}|(t-1)} = \overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} Q^{|\underline{\alpha}|} \ . \tag{5.15.2}$$

De plus, d'après le choix fait pour $\overrightarrow{P}$, il existe une matrice inversible

$$R^{<0>} = \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0}, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1}, \ldots, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}} \right) \text{, avec } |\underline{\gamma}_0|, |\underline{\gamma}_1|, \ldots, |\underline{\gamma}_{\mu-1}| \leq \mu - 1,$$

qui vérifie la formule (5.4.1) :

$$G_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha} - \underline{\beta})!} D^{(\underline{\alpha} - \underline{\beta})} R^{<\underline{\beta}>} \left(R^{<0>}\right)^{-1} \ .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left|G_{\underline{\alpha}}\right|_{v,Gauss} &\leq \left(\sup_{\substack{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha} \\ i=0,\ldots,\mu-1}} \left| \frac{D^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i + \underline{\beta}} \right|_{v,Gauss} \right) \left|\mathrm{adj}\, R^{<0>}\right|_{v,Gauss} \left|\det R^{<0>}\right|_{v,Gauss}^{-1} \\ &\leq \left(\sup_{\underline{\beta} \leq |\underline{\alpha}| + \mu - 1} \left|\overrightarrow{R}_{\underline{\beta}}\right|_{v,Gauss} \right) \left|\mathrm{adj}\, R^{<0>}\right|_{v,Gauss} |\Delta|_{v,Gauss}^{-1} \ , \end{aligned}$$

où on a posé $\Delta(\underline{x}) = \det R^{<0>}(\underline{x})$.

Etant donné notre choix de N et n et (5.15.2), pour tout $|\underline{\beta}| \leq n+\mu-1$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{R}_{\underline{\beta}}\right|_{v,Gauss} &\leq |Q|_{v,Gauss}^{-|\underline{\beta}|}\,|Q|_{v,Gauss}^{|\underline{\beta}|}\,|q|_{v,Gauss}\left|(\overrightarrow{y})_{\leq N+|\underline{\beta}|(t-1)}\right|_{v,Gauss} \\ &\leq |q|_{v,Gauss}\left|(\overrightarrow{y})_{\leq N+|\underline{\beta}|(t-1)}\right|_{v,Gauss}\ ,\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sup_{|\underline{\alpha}|\leq n}\log^+\left|G_{\underline{\alpha}}\right|_{v,Gauss} &\leq \widetilde{h}\left(N+(n+\mu-1)(t-1),v\right) \\ &\quad + (\mu-1)\widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)+\mu h(q,v)+\log|\Delta|_{v,Gauss}^{-1}\ .\end{aligned}$$

Par définition de Q, on a $|Q|_{v,Gauss}\leq 1$ et, d'après (5.7), $Q^{|\underline{\beta}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\beta}}\in K[\underline{x}]^\mu$. Si on pose :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}(\underline{x}) &= Q^{|\underline{\gamma}_0|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0}\wedge Q^{|\underline{\gamma}_1|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1}\wedge\cdots\wedge Q^{|\underline{\gamma}_{\mu-1}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}} \\ &= Q^{\sum_{i=0}^{\mu-1}|\underline{\gamma}_i|}(\underline{x})\Delta(\underline{x})\ ,\end{aligned}$$

on obtient $\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|_{v,Gauss}\leq|\Delta(\underline{x})|_{v,Gauss}$, avec $\overline{\Delta}(\underline{x})\in K[\underline{x}]$, et donc :

$$\begin{aligned}\sup_{|\underline{\alpha}|\leq n}\log^+\left|G_{\underline{\alpha}}\right|_{v,Gauss} &\leq \widetilde{h}\left(N+(n+\mu-1)(t-1),v\right)+ \\ &\quad (\mu-1)\widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)+\mu h(q,v)+\log\left|\overline{\Delta}\right|_{v,Gauss}^{-1}\ .\end{aligned}$$

Etant donnée la condition (5.15.1), on fixe un nombre entier positif k et une suite $\varepsilon_n\in(0,1)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} k>\dfrac{t(\mu-1)}{\kappa} \\ \dfrac{N}{n}=\dfrac{t}{\kappa}+\dfrac{k-\varepsilon_n}{n}\end{array}\right. . \tag{5.15.3}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\sigma(M) &= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f}\sup_{|\underline{\alpha}|\leq n}\log^+\left|G_{\underline{\alpha}}(\underline{x})\right|_{v,Gauss}\right) \\ &\leq \sigma_f(\overrightarrow{y})\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{N+(n+\mu-1)(t-1)}{n}+(\mu-1)\frac{N+(\mu-1)(t-1)}{n}\right)+\Omega \\ &\leq \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{t}{\kappa}+(t-1)+(\mu-1)\frac{t}{\kappa}\right)+\Omega \\ &\leq \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\kappa}+(t-1)\right)+\Omega\ ,\end{aligned}$$

où

$$\Omega=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\mu\sum_{v\in\Sigma_f}h(q,v)+\sum_{v\in\Sigma_f}\log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|_{v,Gauss}^{-1}\right)\ .$$

■

VII. Conclusion de la démonstration.

On a le lemme suivant :

Lemme 5.16.

$$\Omega \leq \sigma_\infty\left(\overrightarrow{y}\right)\frac{\mu t}{\kappa} + \limsup_{n\to+\infty}\frac{\mu}{n}h(q)\ .$$

Démonstration. Soient $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ des racines de l'unité telles que :

$$\overline{\Delta}(\underline{\xi}) \neq 0 \neq Q(\underline{\xi})\ .$$

Etant donné que $|\overline{\Delta}(\underline{\xi})|_v \leq |\overline{\Delta}(\underline{x})|_{v,Gauss}$ pour tout $v \in \Sigma_f$, par la Formule du Produit on a :

$$\sum_{v\in\Sigma_f}\log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|_{v,Gauss}^{-1} \leq \sum_{v\in\Sigma_f}\log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_v^{-1} \leq \sum_{v\in\Sigma_\infty}\log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_v\ .$$

On rappelle que

$$\overline{\Delta}(\underline{x}) = \det\left(Q^{|\underline{\gamma}_0|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0} \quad Q^{|\underline{\gamma}_1|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1} \quad \cdots \quad Q^{|\underline{\gamma}_{\mu-1}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$$

et que pour tout $n \leq \mu - 1$, d'après le choix fait pour n, la formule (5.6.3) est valable. De plus on a :

$$\begin{aligned}\frac{Q^{|\underline{\gamma}_i|}}{\underline{\gamma}_i!}\left(D^{\underline{\gamma}_i}q\right)\overrightarrow{y} &= \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}\left(\sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}=\underline{\alpha}}(Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}}\left(\frac{D^{\underline{\gamma}_i}}{\underline{\gamma}_i!}q\right)_{\underline{\gamma}}\overrightarrow{y}_{\underline{\delta}}\right)\underline{x}^{\underline{\alpha}} \\ &= \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}\left(\sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}=\underline{\alpha}}(Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}}\binom{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i}q_{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}\overrightarrow{y}_{\underline{\delta}}\right)\underline{x}^{\underline{\alpha}}\ ,\end{aligned}$$

où on a utilisé la notation suivante :

pour tout $P \in K[\![\underline{x}]\!]$ et pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, $P_{\underline{\alpha}}$ est le coefficient de $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ dans P.

On en déduit que $Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\underline{\xi})$ est une somme de termes de la forme :

$$(Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}}\binom{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i}q_{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}\overrightarrow{y}_{\underline{\delta}}\underline{\xi}^{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}}\ ,$$

avec :

$$\begin{aligned}&|\underline{\gamma}_i| \leq \mu - 1\ \forall\ i = 1, \ldots, d, \\ &|\underline{\beta}| \leq \deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1}\ , \\ &|\underline{\gamma}| \leq N\ ,\ |\underline{\gamma}+\underline{\gamma}_i| \leq N\ , \\ &|\underline{\delta}| \leq N + (\mu-1)(t-1)\ .\end{aligned}$$

Pour tout $v \in \Sigma_\infty$ on obtient :

$$\left|Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\xi)\right|_v \leq \binom{\deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1}+d}{d}\binom{N+d}{d}\binom{N+(\mu-1)(t-1)+d}{d}$$

$$\cdot \sup(1,c_1)^{\mu-1}\left(\sup_{\substack{\underline{\gamma}\geq\underline{\gamma}_i\\ |\underline{\gamma}|\leq N}}\binom{\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i}\right)\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N+(\mu-1)(t-1)}|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v\right)\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N}|q_{\underline{\alpha}}|_v\right) \ ,$$

avec :

$$c_1 = \sup_{|\underline{\beta}|\leq \deg_{\underline{x}} Q}|(Q)_{\underline{\beta}}|_v \ .$$

On remarque que, pour N assez grand, il existe deux constantes c_2 et c_3 telles que :

$$\sup_{\substack{\underline{\gamma}\geq\underline{\gamma}_i\\ |\underline{\gamma}|\leq N}}\binom{\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i} \leq \binom{N}{\mu-1}^d \leq c_2 N^{d(\mu-1)}$$

et

$$\binom{\deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1}+d}{d}\binom{N+d}{d}\binom{N+(\mu-1)(t-1)+d}{d} \leq c_3 N^{2d} \ .$$

Si on pose :

$$c_v = c_2 c_3 \sup(1,c_1)^{\mu-1} \ ,$$

on obtient l'estimation suivante :

$$\left|Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\xi)\right|_v \leq c_v N^{d(\mu+1)}\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N+(\mu-1)(t-1)}|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v\right)\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N}|q_{\underline{\alpha}}|_v\right) \ .$$

On a enfin :

$$\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_v \leq \mu! c_v^\mu N^{d\mu(\mu+1)}\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N+(\mu-1)(t-1)}|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v\right)^\mu\left(\sup_{|\underline{\alpha}|\leq N}|q_{\underline{\alpha}}|_v\right)^\mu$$

et donc :

$$\sum_{v\in\Sigma_\infty}\log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_v \leq const + d\mu(\mu+1)(\#\Sigma_\infty)\log N +$$

$$\mu\sum_{v\in\Sigma_\infty}h(q,v) + \mu\sum_{v\in\Sigma_\infty}\widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right) \ .$$

On rappelle que, d'après (5.15.3), on a les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N}{n} = \frac{t}{\kappa}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log N}{n} = 0 \ ,$$

d'où on peut conclure, car :

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|^{-1}_{v,Gauss}\right) \\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_\infty} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_v\right) \\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + const + d\mu(\mu+1)(\#\Sigma_\infty)\log N + \mu \sum_{v\in\Sigma_\infty} h(q,v)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\mu \sum_{v\in\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)\right) \\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{\mu}{n}\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} h(q,v) + \frac{\mu}{n}\sum_{v\in\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)\right) \\
&\qquad \le \frac{\mu}{n}h(q) + \frac{\mu t}{\kappa}\sigma_\infty(\overrightarrow{y}) \ .
\end{aligned}$$

■

5.17. Conclusion de la démonstration de (4.1). D'après (5.13.3), on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n}h(q) &\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n}\left(const + \frac{1-\tau}{\tau}\left(d\log N + \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+\kappa N,v\right)\right)\right) \\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1-\tau}{\tau}\left(d\mu\frac{\log N}{n} + \frac{\mu}{n}\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+\kappa N,v\right)\right) \\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu\sigma\left(\overrightarrow{y}\right)\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(N+\kappa N\right) \\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu\sigma\left(\overrightarrow{y}\right)\left(\frac{t}{\kappa}+t\right) \\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu t\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\sigma\left(\overrightarrow{y}\right) \ ,
\end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &\le \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\kappa} + (t-1)\right) + \sigma_\infty\left(\overrightarrow{y}\right)\frac{\mu t}{\kappa} + \sigma\left(\overrightarrow{y}\right)\frac{1-\tau}{\tau}\mu t\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) \\
&\le \sigma(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\tau}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) - \mu t + (t-1)\right) \ .
\end{aligned}$$

La constante $1+\frac{1}{\kappa}$ est minimale pour κ maximal, donc on choisit

$$\kappa = \left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d} - 1 \ .$$

Ainsi la constante dans la dernière estimation dépend de la fonction de $\tau \in (0,1)$ suivante :

$$\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{\tau}\frac{\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d}}{\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d}-1} = \frac{\mu}{\tau(1-\tau)}\sum_{i=1,\dots,d}\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{i/d}$$
$$\leq \frac{d\mu}{\tau(1-\tau)}\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right) = d\mu\left(\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau}\right) .$$

La fonction $\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau}$ a un minimum pour

$$\tau = \left(1+\sqrt{\frac{\mu}{\mu+1}}\right)^{-1} \quad ;$$

pour cette valeur de τ on obtient :

$$\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau} = \left(1+\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}}\right)^2 \leq \begin{cases} 4.95 & \text{pour } \mu \geq 2 \\ 5.9 & \text{pour } \mu = 1 \end{cases} .$$

Enfin on a :

$$\sigma(M) \leq \begin{cases} \sigma(\overrightarrow{y})\left(4.95d\mu^2 t - \mu t + (t-1)\right) & \text{pour } \mu \geq 2 \\ \\ \sigma(\overrightarrow{y})\left(5.9dt - 1)\right) & \text{pour } \mu = 1 \end{cases} .$$

Appendice A. Régularité des modules différentiels de type G.

Définition A.1. *Dans les notations introduites dans (2.2), on dit que (M,∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$, avec $v|p$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est verifiée :*
1) il existe un entier positif n tel que, pour tout $\underline{\omega} \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\underline{\omega}| = n$, $|G_{p\underline{\omega}}|_{X,v} < 1$;
2) $R_v(\mathcal{M}) > |p|_v^{1/(p-1)}$.

On dit que (M,∇) est nilpotent presque partout si l'ensemble des $p \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, tels qu'il existe $v|p$ pour lequel (M,∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$, est de densité de Dirichlet 1.

Remarque A.2. Soit (M,∇) un $\mathcal{F}/K$-module différentiel de type G. On sait ([6] et [5, 4.1]) que les conditions de Bombieri et de Galočkin sont équivalentes; il s'ensuit que l'ensemble $T = \{p \in \mathbb{Z} |\ \exists v|p\ R_{X,v}(\mathcal{M}) \leq |p|_v^{1/(p-1)}\}$ a densité de Dirichlet 1, car :

$$\infty > \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \log\frac{1}{R_{X,v}(\mathcal{M})} \geq \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \log|p|_v^{-1/(p-1)} = \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]}\frac{\log p}{p-1} = \sum_{p\in T}\frac{\log p}{p-1} .$$

On en déduit que les modules différentiels de type G sont nilpotents presque partout.

On a la généralisation suivante du théorème de Katz [8, 13.0], [7, III, Remark 6.3] :

Théorème A.3. *Soit (M,∇) un $\mathcal{F}/K$-module différentiel :*
i) Si (M,∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$ pour un ensemble infini de $v \in \Sigma_S$, alors les singularités de (M,∇) sont régulières.
ii) Si (M,∇) est nilpotent presque partout, les exposants (M,∇) en chaque diviseur sont dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe un diviseur Z de X de codimension pure 1 et un module à connexion integrable $(\mathcal{M},\nabla)$ sur $X \setminus Z$, tel que (M,∇) est la fibre de $(\mathcal{M},\nabla)$ au point générique de X. Soit L une extension finie de K; par changement de base on obtient un module différentiel $(\mathcal{M}_L,\nabla)$ défini sur $X_L \setminus Z_L$. Si (M,∇) satisfait aux hypothèses de *i)* et *ii)* il en est de même de la fibre au point générique $(M\otimes_K L,\nabla)$ de $(\mathcal{M}_L,\nabla)$. De plus, (M,∇) a une singularité régulière en Z si et seulement si $(M\otimes_K L,\nabla)$ a une singularité régulière en Z_L.

Soit $\imath : C \hookrightarrow X_L$ une courbe lisse sur L, telle que $C \cap Z_L = P$. Le module différentiel $(\imath^*\mathcal{M}_L, \imath^*\nabla)$ satisfait aux hypothèses de *i)* et *ii)* sur la courbe C : d'après [8, 13.0] et [7, III, Remark 6.3] la fibre au point générique de $(\imath^*\mathcal{M}_L,\imath^*\nabla)$ est singulière régulière en P et ses exposants sont dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Puisque cela est vrai pour toute extension L et toute courbe C de X_L, on peut conclure grâce à [3, Th. 5.7 et 6.4.3]. ■

Appendice B. Lemme du Wronskien à plusieurs variables.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif intègre muni des dérivations $D_1,\dots,D_d$. On suppose que l'anneau C des constantes de $\mathcal{A}$ par rapport à $D_1,\dots,D_d$:

$$C = \{c \in \mathcal{A} \ : \ D_i(c) = 0 \text{ pour tout } i = 1,\dots,d\}$$

est un corps.

La proposition qu'on va énoncer est une généralisation à plusieurs variables du lemme du Wronskien :

Proposition B.1. *Soient $u_0,\dots,u_{\mu-1}$ des éléments de $\mathcal{A}$; la dimension de l'espace vectoriel engendré sur C par $u_0,\dots,u_{\mu-1}$ est égale au rang de la matrice :*

$$W_d(u_0,\dots,u_{\mu-1}) = (\,\underline{D}^{\underline{\alpha}}u_0 \quad \cdots \quad \underline{D}^{\underline{\alpha}}u_{\mu-1}\,)_{|\underline{\alpha}|\le\mu-1} \ .$$

Démonstration. Soit $r = \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} Cu_i$. On peut supposer que $u_0,\dots,u_{r-1}$ est une base de $\sum_{i=0}^{\mu-1} Cu_i$; étant donné que $u_r,\dots,u_{\mu-1}$ et leurs dérivées peuvent être écrits comme combinaison linéaire à coefficients dans C de $u_1,\dots,u_{r-1}$, on obtient :

$$\text{rang} W_d(u_0,\dots,u_{\mu-1}) \le \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} Cu_i \ .$$

Démontrons l'inégalité inverse. Quitte à changer l'ordre des $u_0, \ldots, u_{\mu-1}$, on peut supposer que :

$$r = \mathrm{rang} W_d(u_0, \ldots, u_{\mu-1}) = \mathrm{rang}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0 \quad \cdots \quad \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1} \right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} .$$

Il suffit de montrer que u_r peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans C de $u_0, \ldots, u_{r-1}$. Sous les hypothèses faites, il existe un vecteur ${}^t(a_0, \ldots, a_{r-1}) \in \mathcal{A}^r$ tel que :

$$\text{(B.1.1)} \qquad (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_r)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} .$$

Pour tout $i = 1, \ldots, d$ on a :

$$\text{(B.1.2)} \qquad \begin{aligned} &(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} \\ &+ (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} D_i a_0 \\ \vdots \\ D_i a_{r-1} \end{pmatrix} = \left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_r\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} . \end{aligned}$$

Si on considère la sous-matrice de (B.1.2) obtenue en retirant les lignes indexées par les $\underline{\alpha}$ tels que $|\underline{\alpha}| = \mu - 1$, on déduit de (B.1.1) que :

$$(\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| < \mu-1} \begin{pmatrix} D_i a_0 \\ \vdots \\ D_i a_{r-1} \end{pmatrix} = 0$$

et donc ${}^t(D_i a_0, \ldots, D_i a_{r-1}) = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, d$. ■

Références

[1] André Y. : "*G-functions and Geometry*", Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[2] André Y., Baldassarri F. : "Geometric theory of G-functions", in *Arithmetic Geometry*, F. Catanese Ed., Symp. Math. XXXVII, Cambridge Univ. Press, 1997.

[3] André Y., Baldassarri F. : "*De Rham Cohomology of Differential Modules on Algebraic Varieties*", Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 184, Septembre 1998.

[4] Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. : "Application of Padé approximation to diophantine inequalities in value of G-functions", Lect.Notes in Math. 1052, Springer-Verlag, 1985, 1-51.

[5] Di Vizio L. : "On the arithmetic size of linear differential equations", à paraître dans Journal of Algebra.

[6] Dwork B. : "On the size of differential modules", Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 225–239.

[7] Dwork B., Gerotto G., Sullivan F. : "*An Introduction to G-functions*", Annals of Mathematical Studies 133, Princeton University Press, Princeton N.J., 1994.

[8] Katz N. M. : "Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin", Publ. Math. IHES 39 (1970), 175-232.