Sur le calcul rapide de quelques fonctions p-adiques

Xavier Caruso
IMB

Marc Mezzarobba
LIP6, Péquan

Tristan Vaccon
XLIM

Séminaire différentiel

le 25 février 2020

Partie 1

Logarithme et exponentielle

Logarithme

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

$O(M)$ opérations modulo p^N

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

$O(M)$ opérations modulo p^N

$\tilde{O}(M N \log p)$ opérations binaires

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

$O(M)$ opérations modulo p^N

$\tilde{O}(M N \log p)$ opérations binaires

**quadratique
en la précision**

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

$O(M)$ opérations modulo p^N

$\tilde{O}(M N \log p)$ opérations binaires

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

$\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$ opérations binaires

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

$$\text{avec } 0 \leq x_i < p^{2^i} \text{ et } s = O(\log N)$$

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

$$\text{avec } 0 \leq x_i < p^{2^i} \text{ et } s = O(\log N)$$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

$$\text{avec } 0 \le x_i < p^{2^i} \text{ et } s = O(\log N)$$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

$$\text{avec } 0 \leq x_i < p^{2^i} \text{ et } s = O(\log N)$$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Logarithme

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x)} + O(\log N)$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - p x_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x) - \frac{1}{p-1}}$$

1. $$\sum_{n=1}^{M} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{n+m}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x) - \frac{1}{p-1}}$$

1. $$\sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + x^m \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n}{(n+m)!}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x) - \frac{1}{p-1}}$$

1. $$\sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n m!}{(n+m)!}$$

Scindage binaire

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $$1 - x = (1 - px_0)(1 - p^2 x_1) \cdots (1 - p^{2^s} x_s)$$

bit-burst

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Exponentielle

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N}{\mathrm{val}(x) - \frac{1}{p-1}}$$

1. $$\sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{n=1}^{M-m} \frac{x^n m!}{(n+m)!}$$

$\boxed{\text{Scindage binaire}}$

$\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$ opérations binaires

2. $x = px_0 + p^2 x_1 + \cdots + p^{2^s} x_s$

$\boxed{\textit{bit-burst}}$

avec $0 \leq x_i < p^{2^i}$ et $s = O(\log N)$

complexité totale : $\tilde{O}(N \log p \cdot s)$ opérations binaires

quasi-linéaire en la précision

Partie 2

Solutions d'équations différentielles

D'où venons-nous ? Où allons-nous ?

D'où venons-nous ? Où allons-nous ?

L'équation différentielle

$$a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

D'où venons-nous ? Où allons-nous ?

L'équation différentielle

$$a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

$$a_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

D'où venons-nous ? Où allons-nous ?

L'équation différentielle

$$a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

$$a_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

Théorème

Il existe un algorithme qui prend en entrée :

☞ l'équation différentielle ci-dessous, *i.e.* les $a_i(t)$ vérifiant l'hypothèse $a_r(0) \not\equiv 0 \pmod{p}$

☞ un entier N (la précision)

☞ un entier p-adique x

et calcule $y(x)$ à précision $O(p^N)$

pour une complexité quasi-linéaire en N.

L'algorithme

L'algorithme

$$a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

$$a_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

L'algorithme

$$a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

$$a_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

α, β tels que $\mathrm{val}(c_n) \geq \alpha n + \beta$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

α, β tels que $\mathrm{val}(c_n) \geq \alpha n + \beta$

lié au rayon de convergence

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

α, β tels que $\mathrm{val}(c_n) \geq \alpha n + \beta$

lié au rayon de convergence

lié à la norme sup sur le disque de convergence

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

α, β tels que $\mathrm{val}(c_n) \geq \alpha n + \beta$

lié au rayon de convergence

lié à la norme sup sur le disque de convergence

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

avec $M = \dfrac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$$

1.

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1.
$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \star & \cdots & \star \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$$

1. $$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1.

$$\begin{bmatrix} c_{n+1}x^{n+1} \\ c_{n+2}x^{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s}x^{n+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \star & \cdots & \star \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_n x^n \\ c_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1}x^{n+s-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1.
$$\begin{bmatrix} c_{n+1}x^{n+1} \\ c_{n+2}x^{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s}x^{n+s} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \star & \cdots & \star & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n x^n \\ c_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1}x^{n+s-1} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. $$\begin{bmatrix} c_{n+1}x^{n+1} \\ c_{n+2}x^{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s}x^{n+s} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \star & \cdots & \star & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n x^n \\ c_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1}x^{n+s-1} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

$$A_M \cdots A_2 A_1$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1.
$$\begin{bmatrix} c_{n+1}x^{n+1} \\ c_{n+2}x^{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s}x^{n+s} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \star & \cdots & \cdots & \star & \\ 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n x^n \\ c_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1}x^{n+s-1} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

$$A_M \cdots A_2 A_1 = (A_M \cdots A_{m+1}) \cdot (A_m \cdots A_1)$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. $$\begin{bmatrix} c_{n+1}x^{n+1} \\ c_{n+2}x^{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+s}x^{n+s} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \star & \cdots & \star \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n x^n \\ c_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+s-1}x^{n+s-1} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

$$A_M \cdots A_2 A_1 = (A_M \cdots A_{m+1}) \cdot (A_m \cdots A_1) \qquad \tilde{O}(M \cdot \log|x|)$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$
2. *Bit-burst*

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$$

1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$

2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2 x_1 + \cdots + p^{2^s} x_s$$

$$0 \leq x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$

L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

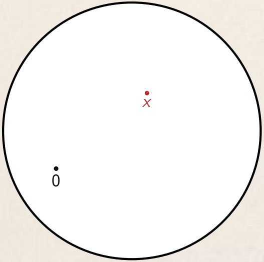
$$\text{avec } M = \frac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$$

1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$
2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$$

$$0 \leq x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$



L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

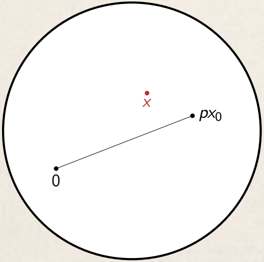
$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$
2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$$

$$0 \le x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$



L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N - \beta}{\mathrm{val}(x) + \alpha}$$

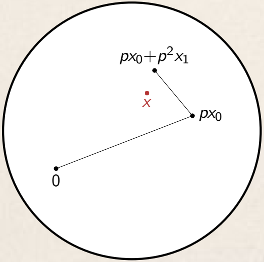
1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log |x|)$

2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2 x_1 + \cdots + p^{2^s} x_s$$

$$0 \leq x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$



L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

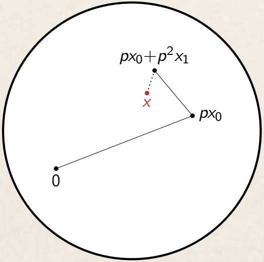
$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

1. **Scindage binaire** .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$
2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$$

$$0 \leq x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$



L'algorithme

$$b_s(n)c_{n+s} + b_{s-1}(n)c_{n+s-1} + \cdots + b_1(n)c_{n+1} + b_0(n)c_n = 0$$

$$b_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \pmod{p^N}$$

$$\text{avec } M = \frac{N-\beta}{\mathrm{val}(x)+\alpha}$$

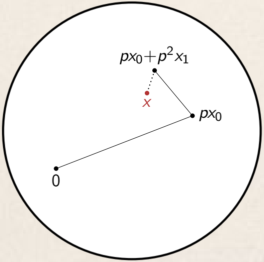
1. Scindage binaire .... $\tilde{O}(M \cdot \log|x|)$

2. *Bit-burst*

$$x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$$

$$0 \le x_i < 2^{p^i}$$

$$s = O(\log N)$$



quasi-linéaire en la précision

Fonctions hypergéométriques

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a, b, c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$

Équation différentielle

$$ t(1-t)y'' + \big(c - (a+b+1)t\big)y' - ab\,y = 0 $$

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\;n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a{+}1)\cdots(a{+}n{-}1)$

Équation différentielle

$t(1-t)y'' + \big(c - (a{+}b{+}1)t\big)y' - ab\,y = 0$

Algorithme de calcul pour $a, b \in \mathbb{Q}$**,** $c = 1$

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a{+}1)\cdots(a{+}n{-}1)$

Équation différentielle

$t(1-t)y'' + \big(c-(a{+}b{+}1)t\big)y' - ab\,y = 0$

Algorithme de calcul pour $a, b \in \mathbb{Q}$, $c = 1$

on écrit $x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$

avec $0 \le x_i < 2^{p^i}$ et $s = O(\log N)$

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$

Équation différentielle

$$ t(1-t)y'' + \big(c - (a+b+1)t\big)y' - aby = 0 $$

Algorithme de calcul pour $a, b \in \mathbb{Q}$**,** $c = 1$

on écrit $x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$

avec $0 \le x_i < 2^{p^i}$ et $s = O(\log N)$

on calcule ${}_2F_1(a,b,c;px_0)$ avec la formule par scindage binaire

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a, b, c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \, (b)_n}{(c)_n \, n!} \, t^n $$

avec $(a)_n = a(a{+}1) \cdots (a{+}n{-}1)$

Équation différentielle

$t(1{-}t)y'' + \big(c - (a{+}b{+}1)t\big)y' - ab\,y = 0$

Algorithme de calcul pour $a, b \in \mathbb{Q}$**,** $c = 1$

on écrit $x = px_0 + p^2 x_1 + \cdots + p^{2^s} x_s$

avec $0 \le x_i < 2^{p^i}$ et $s = O(\log N)$

on calcule ${}_2F_1(a, b, c; px_0)$ avec la formule par scindage binaire

on applique ensuite la méthode basée sur l'équation différentielle

Fonctions hypergéométriques

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$

Équation différentielle

$t(1-t)y'' + \big(c-(a+b+1)t\big)y' - aby = 0$

Algorithme de calcul pour $a, b \in \mathbb{Q}$, $c = 1$

on écrit $x = px_0 + p^2x_1 + \cdots + p^{2^s}x_s$

avec $0 \leq x_i < 2^{p^i}$ et $s = O(\log N)$

on calcule ${}_2F_1(a,b,c;px_0)$ avec la formule par scindage binaire

on applique ensuite la méthode basée sur l'équation différentielle

quasi-linéaire
en la précision

Partie 3

Fonctions renormalisées

Exponentielle de Artin–Hasse

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right)$$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!]$$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence
en travaillant à précision $O\left(p^{N+O(\log n)}\right)$

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence
en travaillant à précision $O\left(p^{N+O(\log n)}\right)$

$\tilde{O}(Nn)$ opérations binaires

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence
en travaillant à précision $O\left(p^{N+O(\log n)}\right)$

$\tilde{O}(Nn)$ opérations binaires

Calcul d'une valeur spéciale

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence
en travaillant à précision $O\left(p^{N+O(\log n)}\right)$

$\tilde{O}(Nn)$ opérations binaires

Calcul d'une valeur spéciale

on résout l'équation

$$\log\left(AH(x)\right) = x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{x^{p^s}}{p^s} \qquad \left(s = O(\log N)\right)$$

par une itération de Newton

Exponentielle de Artin–Hasse

$$\mathrm{AH}(t) = \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \frac{t^{p^3}}{p^3} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\![t]\!] \subset \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

$$y' = \left(1 + t^{p-1} + t^{p^2-1} + t^{p^3-1} + \cdots\right) y$$

$$n\, c_n = c_{n-1} + c_{n-p} + c_{n-p^2} + c_{n-p^3} + \cdots$$

Calcul de la série

on déroule la récurrence
en travaillant à précision $O\big(p^{N+O(\log n)}\big)$

$\tilde{O}(Nn)$ opérations binaires

Calcul d'une valeur spéciale

on résout l'équation

$$\log\big(AH(x)\big) = x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{x^{p^s}}{p^s} \qquad \big(s = O(\log N)\big)$$

par une itération de Newton

même complexité asymptotique que le calcul de log

Fonction Γ p-adique

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \; = \; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) \quad \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) \quad\;\; \text{sinon} \end{aligned}$$

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) \quad \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) \quad \text{si } p \not| \, t \\ &= -\Gamma_p(t) \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

$$\Gamma_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t)_n$$

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) \quad \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

$$\Gamma_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t)_n \qquad \text{avec } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\, t^n = \tfrac{1-t^p}{1-t} \exp\left(t + \tfrac{t^p}{p}\right)$$

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) && \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) && \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

$$\Gamma_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t)_n \qquad \text{avec } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\, t^n = \tfrac{1-t^p}{1-t} \exp\left(t + \tfrac{t^p}{p}\right)$$

$\tilde{O}(pN^2)$ opérations binaires

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) && \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) && \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

$$\Gamma_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t)_n \qquad \text{avec} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\,t^n = \tfrac{1-t^p}{1-t} \exp\left(t + \tfrac{t^p}{p}\right)$$

$\tilde{O}(pN^2)$ opérations binaires

Peut-on faire mieux ?

Fonction Γ p-adique

$$\Gamma_p(n) \;=\; (-1)^n \prod_{\substack{0<i<n \\ \mathrm{pgcd}(i,p)=1}} i$$

Équation aux différences

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t+1) &= -t\,\Gamma_p(t) && \text{si } p \nmid t \\ &= -\Gamma_p(t) && \text{sinon} \end{aligned}$$

Série de Mahler

$$\Gamma_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t)_n \qquad \text{avec } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\,t^n = \tfrac{1-t^p}{1-t} \exp\left(t + \tfrac{t^p}{p}\right)$$

$\tilde{O}(pN^2)$ opérations binaires

Peut-on faire mieux ?

Les équivalents naturels du scindage binaire et du *bit-burst* deviennent **couteux** dans ce contexte d'équation aux différences

Fonctions hypergéométriques de Dwork

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\; n!}\, t^n $$

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\; n!}\, t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil,\lceil b/p\rceil,1;x^p)_{<p^s}} $$

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil, \lceil b/p\rceil, 1; x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\;n!}\,t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil,\lceil b/p\rceil,1;x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Asakura montre comment lire $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$ (avec $n,m<p$)
sur la matrice du Frobenius agissant
sur la cohomologie cristalline d'une certaine fibration

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\; n!}\, t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil, \lceil b/p\rceil, 1; x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Asakura montre comment lire $\mathcal{F}(\frac{i}{n}, \frac{j}{m}; x)$ (avec $n, m < p$)
sur la matrice du Frobenius agissant
sur la cohomologie cristalline d'une certaine fibration

Il en déduit un algorithme de calcul de $\mathcal{F}(\frac{i}{n}, \frac{j}{m}; x)$

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p \rceil, \lceil b/p \rceil, 1; x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Asakura montre comment lire $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$ (avec $n,m<p$)
sur la matrice du Frobenius agissant
sur la cohomologie cristalline d'une certaine fibration

Il en déduit un algorithme de calcul de $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$

$\tilde{O}(p^\star N^4)$ opérations binaires

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil,\lceil b/p\rceil,1;x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Asakura montre comment lire $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$ (avec $n,m<p$)
sur la matrice du Frobenius agissant
sur la cohomologie cristalline d'une certaine fibration

Il en déduit un algorithme de calcul de $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$

$\tilde{O}(p^\star N^4)$ opérations binaires

Peut-on faire mieux ?

Fonctions hypergéométriques de Dwork

$$ {}_2F_1(a,b,c;t)_{<p^s} = \sum_{n=0}^{p^s-1} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n $$

$$ \mathcal{F}(a,b;x) = \lim_{s\to\infty} \frac{{}_2F_1(a,b,1;x)_{<p^s}}{{}_2F_1(\lceil a/p\rceil,\lceil b/p\rceil,1;x^p)_{<p^s}} $$

Calcul d'une valeur spéciale

Asakura montre comment lire $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$ (avec $n,m<p$)
sur la matrice du Frobenius agissant
sur la cohomologie cristalline d'une certaine fibration

Il en déduit un algorithme de calcul de $\mathcal{F}(\frac{i}{n},\frac{j}{m};x)$

$\tilde{O}(p^\star N^4)$ opérations binaires

Peut-on faire mieux ?

Une idée serait d'utiliser des méthodes variationnelles à la Lauder :
on calcule la connexion sur la cohomologie cristalline,
puis on applique les méthodes de cet exposé...

Merci

de votre attention