Opérateurs différentiels déformés
(Paris – 2020)

Bernard Le Stum
(avec Michel Gros et Adolfo Quirós)

Université de Rennes 1

2 mars 2020

Sommaire

Calcul aux différences

Lorsque A est une « algèbre de fonctions en une variable x » et $f \in A$, on a

$$\partial(f) = \lim_{h \to 0} \Delta_h(f) = \lim_{q \to 1} \delta_q(f)$$

où $\partial(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$ désigne la dérivée de f,

$$\Delta_h(f)(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{et} \quad \delta_q(f)(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Si on utilise Δ_h (resp. δ_q) au lieu de ∂, alors on remplace le calcul différentiel par le calcul aux *différences finies* (resp. aux *q-différences*). On peut réunir les deux dans le *calcul aux différences* en utilisant l'opérateur

$$f(x) \mapsto \frac{f(qx+h) - f(x)}{(q-1)x + h}.$$

Formalisation

Si l'on considère l'endomorphisme

$$\sigma : A \to A, \quad f(x) \mapsto f(qx + h),$$

on regarde donc l'opérateur ∂_σ donné par

$$\partial_\sigma(f) = \frac{\sigma(f) - f}{\sigma(x) - x}.$$

Ceci fait sens chaque fois que A est un un anneau commutatif muni d'un endomorphisme σ et d'un élément x tel que $\sigma(x) - x \in A^\times$. Cette approche fournit une théorie de Galois déformée comme expliqué par Yves André dans [And01].

On peut en fait formaliser tout cela de telle sorte que la condition $\sigma(x) - x \in A^\times$ disparaisse et même que l'on retrouve $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ dans le cas ou $\sigma = \mathrm{Id}_A$. C'est l'objet de la théorie des opérateurs différentiels déformés. Dans tout ce qui suit, lorsque $\sigma = \mathrm{Id}_A$, on l'omet des notations.

Coordonnée déformée

Soit R un anneau commutatif. Dans ce qui suit, on peut remplacer R par une algèbre affinoïde sur un corps ultramétrique K ou par un anneau adique (ou même f-adique) quitte à rajouter des conditions topologiques.

Une *R-algèbre déformée* est une R-algèbre commutative A munie d'un endomorphisme σ. On pose (voir [LQ18])

$$P := A \otimes_R A, \quad I := \ker(P \to A, f \otimes g \mapsto fg), \quad \sigma(f \otimes g) := \sigma(f) \otimes g,$$

$$I^{(n+1)} := I\sigma(I) \cdots \sigma^n(I) \quad \text{et} \quad P_{(n)} := P/I^{(n+1)}.$$

Soit $x \in A$, $\xi := 1 \otimes x - x \otimes 1 \in P$ et $\xi^{(n+1)} := \xi\sigma(\xi) \cdots \sigma^n(\xi)$. On dira que x est une *σ-coordonnée* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{(n)}$ est un A-module libre sur (les classes de) $1, \ldots, \xi^{(n)}$.

En pratique, on aura souvent $\sigma(x) = qx$ avec $q \in R$ (ou plus généralement $\sigma(x) = qx + h$). Dans ce cas, on remplacera partout l'indice ou le préfixe σ par q.

Exemple

1. R un anneau commutatif, A une R-algèbre lisse (de dimension relative un) et $\sigma = \mathrm{Id}_A$. Alors x est une σ-coordonnée sur A si et seulement si x est une coordonnée étale sur A.
2. R un anneau commutatif, $q \in R^\times$ et $A = R[x, 1/x]$. Alors, il existe un unique endomorphisme σ de A tel que $\sigma(x) = qx$ et x est une σ-coordonnée.
3. $R = K$ un corps ultramétrique complet, $q \in K$ avec $r'/r \leq |q| \leq 1$, $A = K\{x/r, r'/x\}$ l'anneau des fonctions qui convergent pour $r' \leq |x| \leq r$. Alors, il existe un unique endomorphisme σ de A tel que $\sigma(x) = qx$ et x est une σ-coordonnée (topologique).
4. R un anneau adique et $q \in R$ avec $q - 1$ topologiquement nilpotent. A une R-algèbre adique et x une coordonnée (topologique) étale sur A. Alors, il existe un unique endomorphisme σ de A tel que $\sigma(x) = qx$ et x est une σ-coordonnée (topologique).

Dérivation déformée

Une *σ-dérivation* à valeurs dans un A-module M est une application R-linéaire $D : A \to M$ qui satisfait la *règle de Leibniz déformée*

$$\forall f, g \in A, \quad D(fg) = \sigma(f)D(g) + gD(f).$$

Celles-ci forment un A-module $\mathrm{Der}_\sigma(M)$. On dispose d'une σ-dérivation universelle $d_\sigma : A \to \Omega_\sigma := I/I^{(2)}$ qui est induite par l'application $f \mapsto 1 \otimes f - f \otimes 1$. On a $\mathrm{Der}_\sigma(M) \simeq \mathrm{Hom}(\Omega_\sigma, M)$.

Si x est une σ-coordonnée, alors $\Omega_\sigma = A\mathrm{d}_\sigma x$ et il existe donc une unique σ-dérivation $\partial_\sigma : A \to A$ telle que $\partial_\sigma(x) = 1$: c'est une base de $\mathrm{Der}_\sigma(A)$.

Exemple

1. Si A est lisse sur R de dimension relative un, $\sigma = \mathrm{Id}_A$ et x est coordonnée étale, alors $\partial_\sigma = \partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$.
2. Si x est une q-coordonnée sur A, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \partial_q(x^n) = (n)_q x^{n-1}.$$

q-analogue

Si $q \in R$, on définit les *q-analogues* des coefficients binomiaux (qui sont tous nuls pour $n < 0$ ou $k < 0$) par récurrence pour $n, k \geq 0$ par :

$$\binom{0}{0}_q := 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{k}_q := \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q .$$

En particulier, on dispose du q-analogue d'un entier naturel :

$$(n)_q := \binom{n}{1}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

On utilise aussi le q-analogue de la factorielle $(n)_q! := (n)_q(n-1)_q \cdots$.

Exemple

1. Lorsque $q = 1$, on retrouve les notions habituelles.
2. Lorsque $R = k(t)$ (k un corps), on a $(n)_t = \dfrac{1 - t^n}{1 - t}$.

q-caractéristique

Si $q \in R$, alors la *q-caractéristique* $\mathrm{car}_q(R)$ de R est le plus petit entier naturel non nul p tel que $(p)_q = 0$ (ou 0 sinon).

Exemple

1. Lorsque $q = 1$, on retrouve la notion de caractéristique habituelle.
2. Si $\mathrm{car}_q(R) = p > 0$, alors q est une racine de l'unité (et $q \in R^\times$).

On dira que R est *q-plat* (resp. *q-divisible*) si $(n)_q$ est toujours régulier (resp. inversible) ou nul.

Exemple

1. R est 1-plat $\Leftrightarrow$ R n'a pas de $\mathbb{Z}$-torsion ou bien R est une $\mathbb{F}_p$-algèbre.
   R est 1-divisible $\Leftrightarrow$ R est une k-algèbre (k un corps).
2. Supposons $\mathrm{car}_q(R) = p > 0$.
   2.1 Si R est q-plat, alors q est une racine primitive p-ième de l'unité.
   2.2 Si p est premier, alors R est q-divisible.

Connexion déformée

Soit A une R-algèbre déformée et M un A-module. Une *σ-connexion* $\nabla : M \to M \otimes_A \Omega_\sigma$ est une application R-linéaire satisfaisant la *règle de Leibniz déformée*

$$\forall f \in A, \forall s \in M, \quad \nabla(fs) = \sigma(f)\nabla(g) + s \otimes d_\sigma(f).$$

Si x est une σ-coordonnée telle que $\sigma(x) - x \in A^\times$, il revient au même de se donner la σ-connexion ou un endomorphisme σ-linéaire u. La correspondance est fournie par la formule

$$\nabla(s) = \frac{u(s) - s}{\sigma(x) - x} \otimes d_\sigma x.$$

Exemple

$R = K$ un corps ultramétrique complet, $q \in R$ avec $q \neq 1$, $a \in K$ tel que le « q-analogue » $(a)_q := \sum_{k=1}^{\infty} \binom{a}{k}(q-1)^{k-1}$ converge dans K et $M = As$ un module de rang un. Alors, la q-connexion $\nabla(s) = (a)_q s \otimes \mathrm{d}_q x$ correspond à l'endomorphisme $u(s) = q^a s$.

Opérateur différentiel déformé

On peut plonger A dans la R-algèbre $\mathrm{End}_R(A)$ des endomorphismes R-linéaires de A (action par multiplication) et considérer la sous-algèbre $\overline{\mathrm{D}}_\sigma \subset \mathrm{End}_R(A)$ engendrée par A et par les σ-dérivations. Cet anneau est trop *petit*.

Exemple

Si $\mathrm{car}_q(R) = p > 0$, on a toujours $\partial_q^p(f) = 0$ même si $R = \mathbb{C}$ (phénomène de p-courbure).

On va construire deux autres anneaux d'opérateurs différentiels déformés plus gros : $\mathrm{D}_\sigma^{(0)}$ (ou plus simplement D_σ) et $\mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}$, avec une surjection $\mathrm{D}_\sigma^{(0)} \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{D}}_\sigma$ et une injection $\overline{\mathrm{D}}_\sigma \hookrightarrow \mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}$.

Si x est une σ-coordonnée, on peut considérer l'*extension de Ore* D_σ de A par ∂_σ et σ : c'est l'ensemble des sommes *formelles* finies $\sum_{k=0}^{d} f_k \partial_\sigma^k$ avec $f_k \in A$ et la règle de commutation $\partial_\sigma \circ f = \partial_\sigma(f) + \sigma(f)\partial_\sigma$. On a alors un isomorphisme entre la catégorie des D_σ-modules et celle des A-modules munis d'une *σ-connexion*.

Opérateur de niveau infini

On rappelle que $P_{(n)} := P/I^{(n)}$ avec $P := A \otimes_R A$ et on a donc une inclusion

$$D^{(\infty)}_{\sigma,n} := \mathrm{Hom}_A(P_{(n)}, A) \subset \mathrm{Hom}_A(P, A) \simeq \mathrm{End}_R(A).$$

L'anneau des *opérateurs différentiels déformés de niveau infini* ([LQ18]) est

$$D^{(\infty)}_{\sigma} := \bigcup_n D^{(\infty)}_{\sigma,n}$$

(c'est bien un sous-anneau de $\mathrm{End}_R(A)$).

Si x est une σ-coordonnée, alors chaque $P_{(n)}$ est libre sur (les classes de) $1, \xi, \ldots, \xi^{(n)}$. Si on désigne par $1, \partial_\sigma, \ldots, \partial_\sigma^{[n]} \in D^{(\infty)}_{\sigma,n}$ la base duale, on voit que $\mathrm{D}^{(\infty)}_{\sigma}$ est l'ensemble des sommes formelles finies $\sum_{k=0}^{d} f_k \partial_\sigma^{[k]}$.

Exemple

Si x est une q-coordonnée, on a $\partial_q^{[k]} \circ \partial_q^{[l]} = \binom{k+l}{l}_q \partial_q^{[k+l]}$.

Déformation formelle

On suppose dorénavant que x est une σ-coordonnée. On a alors une factorisation épi-mono naturelle $\mathrm{D}_\sigma \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{D}}_\sigma \hookrightarrow \mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}, \partial_\sigma \mapsto \partial_\sigma^{[1]}$.

On désigne par $K_\sigma^{[r]} \subset \mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}$ l'idéal à gauche formé des $\sum_{k=r}^{d} f_k \partial_\sigma^{[k]}$.

Exemple

Si R est q-divisible, $\mathrm{car}_q(R) = p$ et x est une q-coordonnée, alors

$$\mathrm{D}_q/\partial_q^p \simeq \overline{\mathrm{D}}_q \simeq \mathrm{D}_q^{(\infty)}/K_q^{[p]} \quad \left(\mathrm{D}_q \simeq \overline{\mathrm{D}}_q \simeq \mathrm{D}_q^{(\infty)} \text{ si } p = 0\right).$$

On munit $D_\sigma^{(\infty)}$ de la topologie linéaire associée aux $K_\sigma^{[r]}$ et on désigne par $\widehat{D}_\sigma^{(\infty)}$ le complété de $D_\sigma^{(\infty)}$ (ce n'est pas un anneau).

Théorème (Déformation formelle)

Si τ est un autre endomorphisme de A, on a un isomorphisme naturel

$$\widehat{D}_\sigma^{(\infty)} \simeq \widehat{D}_\tau^{(\infty)}.$$

Forme explicite

Si on voit cet isomorphisme comme une égalité, on a

$$\partial_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\sigma(x) - \tau^i(x)\right) \right) \partial_\tau^{[k]}.$$

Exemple

Si x est une q-coordonnée étale (cas $\sigma(x) = qx$ et $\tau = \mathrm{Id}_A$), alors

$$\partial_q = \sum_{k=1}^{\infty} (q-1)^{k-1} x^{k-1} \partial^{[k]} \quad (x\partial_q = (x\partial)_q),$$

et

$$\sigma = 1 + (q-1)x\partial_q = \sum_{k=0}^{\infty} (q-1)^k x^k \partial^{[k]} \quad (\sigma = q^{x\partial}).$$

η-convergence

On suppose ici que K est un corps ultramétrique complet, R une K-algèbre affinoïde et A une R-algèbre affinoïde. Un $\mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}$-module M est *η-convergent* (resp. *$\eta\dagger$-convergent*) si

$$\forall s \in M, \quad \left\|\partial_\sigma^{[k]}(s)\right\| \eta^k \to 0 \text{ quand } k \to +\infty$$

(resp. M est η'-convergent quand $\eta' < \eta$). On suppose que A est η-convergent (resp. $\eta\dagger$-convergent) et que $\|\sigma(x) - x\| \leq \eta$ (resp. $<$).

Exemple

Si $R := K$ et $A := K\{x/r, r'/x\}$, les conditions sur A s'écrivent $|1-q|r \leq \eta < r'$ (resp. $|1-q|r < \eta \leq r'$) : on veut q proche de 1.

On peut alors munir d'une structure *d'anneau* le sous-module $\mathrm{D}_\sigma^{(\eta)}$ (resp. $\mathrm{D}_\sigma^{(\eta\dagger)}$) $\subset \widehat{\mathrm{D}}_\sigma^{(\infty)}$ défini par la condition

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|f_k\| \leq C\eta^k \quad \left(\text{resp.} \quad \exists \eta' < \eta, \frac{\|f_k\|}{\eta'} \to 0\right).$$

Déformation ultramétrique

Théorème (Déformation ultramétrique)

Si τ est un autre endomorphisme de A, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{D}_\sigma^{(\eta)} \simeq \mathrm{D}_\tau^{(\eta)} \quad (\text{resp.} \quad \mathrm{D}_\sigma^{(\eta\dagger)} \simeq \mathrm{D}_\tau^{(\eta\dagger)}).$$

Corollaire

On a une équivalence de catégorie entre les $\mathrm{D}_\sigma^{(\infty)}$-modules $\eta\dagger$-convergents et les $\mathrm{D}_\tau^{(\infty)}$-modules $\eta\dagger$-convergents.

On suppose maintenant que R est q-divisible de q-caractéristique nulle et que x est une q-coordonnée. Une q-connexion sur un A-module fini M est η-*convergente* si

$$\forall s \in M, \quad \left\| \frac{\nabla_x^k(s)}{(k)_q!} \right\| \eta^k \to 0 \text{ quand } k \to +\infty,$$

et $\eta\dagger$-*convergente* si M est η'-convergent pour $\eta' < \eta$.

Confluence ultramétrique

On suppose de plus maintenant que $\mathrm{Car}(K) = 0$ et que x est une coordonnée étale. On retrouve alors un résultat d'Andrea Pulita ([Pul17]) :

Théorème (Confluence ultramétrique)

La catégorie des A-modules finis munis d'une connexion $\eta\dagger$-convergente est isomorphe à celle des A-modules finis munis d'une q-connexion $\eta\dagger$-convergente. De plus, les espaces de cohomologie sont préservés par cette correspondance.

Exemple

1. L'équation différentielle $xy' - ay = 0$ correspond à l'équation aux q-différences $x\partial_q(y) - (a)_q y = 0$, et à l'équation fonctionnelle $y(qx) = q^a y(x)$. Et les solutions sont exactement les mêmes.
2. L'équation différentielle $y' - cy = 0$ correspond à une équation aux q-différences de la forme $\partial_q(y) - c_q(x)y = 0$ et à l'équation fonctionnelle $y(qx) = \exp((q-1)cx)y(x)$. Et les solutions sont exactement les mêmes.

Connexion déformée quasi-nilpotente

On revient à R, A génériques avec σ-coordonnée x et on dit qu'une σ-connexion ∇ sur un A-module M est *quasi-nilpotente* si $\forall s \in M, \exists N \in \mathbb{N}, \nabla_x^N(s) = 0$.

On munit D_σ de la topologie associée à l'idéal à gauche (∂_σ) et on désigne par $\widehat{D}_\sigma$ son complété (comme précédemment, ce n'est pas un anneau).

Exemple

Si x est une q-coordonnée et R est q-divisible de caractéristique nulle, alors $\widehat{\mathrm{D}}_q = \widehat{\mathrm{D}}_q^{(\infty)}$.

Théorème

Si x est une q-coordonnée avec $\mathrm{car}_q(R) = p > 0$, alors la multiplication est continue sur D_q et $\widehat{\mathrm{D}}_q$ est un anneau.

La catégorie des $\widehat{\mathrm{D}}_q$-modules discrets est isomorphe à celle des modules à q-connexion quasi-nilpotente.

Déformation arithmétique

On suppose ici que R est un anneau adique et que A est une R-algèbre adique.

Théorème (Déformation arithmétique)

Supposons que p est premier et que R est un anneau p-adique (complet) de q-caractéristique p. Il existe alors un unique morphisme A-linéaire continu de R-algèbres

$$\widehat{\mathrm{D}}_q \to \widehat{\mathrm{D}}, \quad \partial_q \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^{k-1}}{k!} x^{k-1} \partial^k$$

(on a $(q-1)^{k-1}/k! \in R$). Celui-ci se factorise par $\overline{\mathrm{D}}_q$.

On obtient un foncteur de *confluence* de la catégorie des A-modules finis munis d'une connexion topologiquement quasi-nilpotente vers celle des A-modules finis munis d'une q-connexion topologiquement quasi-nilpotente.

q-frobenius

Soit p un nombre premier. Soit R un anneau muni d'un (relèvement du) frobenius ϕ et $q \in R$. Soit A une R-algèbre munie d'une q-coordonnée étale. Un *q-frobenius* sur A ([GLQ19]) est un morphisme

$$F : A' := R_{\phi}{\nwarrow}\otimes_R A \to A$$

localement libre de rang p tel que $F(1 \otimes x) = x^p$ et $\partial_q \circ F = 0$.

Exemple

R une $\mathbb{Z}[q]_{(p,q-1)}$-algèbre et ϕ un relèvement du frobenius tel que $\phi(q) = q^p$. A une R-algèbre complète pour la topologie $(p, q-1)$-adique munie d'une coordonnée topologique étale x. Alors, il existe un unique σ sur A tel que x soit une q-coordonnée topologique et il existe un unique q-frobenius F sur A.

Un *champ de Higgs* sur un A'-module N est une application A'-linéaire $\theta : N \to N \otimes \Omega_{A'}$ (telle que $\theta \wedge \theta = 0$). Un *A'-module de Higgs* est un A'-module N muni d'un champ de Higgs.

Correspondance de Cartier-Simpson déformée

Théorème (Correspondance de Cartier-Simpson déformée)

Si $Car_q(R) = p$, alors F induit une équivalence entre la catégorie des A'-modules de Higgs quasi-nilpotents et celle des A-modules munis d'une q-connexion quasi-nilpotente.

Démonstration.

On désigne par Z_q (resp. $\mathrm{Z}_q A$) le centre de (resp. le centralisateur de A dans) D_q. On montre une équivalence entre la catégorie des modules de Higgs sur A' et celle des $\mathrm{Z}_q A$-modules (théorie de la p-courbure déformée). Le coeur de la démonstration consiste ensuite à construire un morphisme (resp. un isomorphisme)

$$\mathrm{D}_q \to \mathrm{End}_{\mathrm{Z}_q}(\mathrm{Z}_q A) \quad \left(\text{resp. } \widehat{\mathrm{D}}_q \simeq \mathrm{End}_{\widehat{\mathrm{Z}_q}}(\widehat{\mathrm{Z}_q A})\right).$$

On conclut avec l'équivalence de Morita. □

Prismes et déformation (travaux en cours)

On suppose maintenant que R est une $\mathbb{Z}[q]_{(p,q-1)}$-algèbre sans $(p)_q$-torsion avec $R/(p)_q$ à p^∞-torsion bornée et que ϕ est un frobenius tel que $\phi(q) = q^p$. On suppose que A est complète pour la topologie $(p, q-1)$-adique. On désigne par $\mathfrak{a}$ un *q-PD-idéal* de A (par exemple $\mathfrak{a} = (q-1)$ ou $\mathfrak{a} = \mathcal{N} := \phi^{-1}((p)_q)$) et on pose $\overline{A} = A/\mathfrak{a}$.

On dispose alors d'un diagramme commutatif (voir [BS19] pour la théorie des prismes) :

$$\begin{tikzcd}
\{\overline{A'}\text{−cristaux prismatiques}\} \arrow[r, "F^*"] \arrow[d] & \{\overline{A}\text{−}q\text{−cristaux}\} \arrow[d] \\
\left\{D^{(-1)}_{A',q}\text{−modules}\right\} \arrow[r, "F^*"] & \left\{D^{(0)}_{A,q}\text{−modules}\right\}
\end{tikzcd}$$

De plus, la flèche du bas est une équivalence (avec quelques conditions de finitude) qui relève l'équivalence de Cartier-Simpson déformée. On espère des équivalences partout quite à modifier certaines définitions.

Yves André. “Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences”. In : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 34.5 (2001), pages 685-739 (cf. page 4).

Bargav Bhatt et Peter Scholze. *Prisms and prismatic cohomology*. prépublication, 2019 (cf. page 23).

Michel Gros, Bernard Le Stum et Adolfo Quirós. “Twisted divided powers and applications”. In : *Journal of Number Theory* (2019) (cf. page 21).

Bernard Le Stum et Adolfo Quirós. “Formal confluence of quantum differential operators”. In : *Pacific Journal of Mathematics* 292.2 (2018), pages 427-478 (cf. pages 5, 12).

Andrea Pulita. “Infinitesimal deformation of p-adic differential equations on Berkovich curves”. In : *Math. Ann.* 368.1-2 (2017), pages 111-164 (cf. page 17).