Structure de Frobenius forte, algébricité modulo p et indépendance algébrique

VARGAS-MONTOYA DANIEL

INSTITUT CAMILLE JORDAN, LYON

Seminaire différentiel
Paris, France
17 Novembre, 2020

BUTS

BUTS

- Algébricité modulo p.

BUTS

- Algébricité modulo p.
- Indépendance algébrique

Motivation

Pour certaines G -fonctions, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, on a la situation suivante: il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

Motivation

Pour certaines G -fonctions, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, on a la situation suivante: il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

$f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Donc on peut considérer f modulo p.

Motivation

Pour certaines G -fonctions, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, on a la situation suivante: il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

$f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Donc on peut considérer f modulo p.

Motivation

Pour certaines $\mathcal{G}$ -fonctions, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, on a la situation suivante: il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

$f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Donc on peut considérer f modulo p.

$$f_{|p} := \sum_{n\geq 0} (a_n \mod p) z^n \in \mathbb{F}_p[[z]]$$

est alébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$.

Motivation

Pour certaines G -fonctions, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, on a la situation suivante: il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

$f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Donc on peut considérer f modulo p.

$$f_{|p} := \sum_{n \geq 0} (a_n \mod p) z^n \in \mathbb{F}_p[[z]]$$

est alébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$.

En particulier pour telles séries il existe $a_0(z), \ldots, a_d(z) \in \mathbb{F}_p(z)$, non toutes nulles telles que

$$a_0(z) f_{|p}(z) + a_1(z) f_{|p}(z^p) + \cdots + a_d(z) f_{|p}(z^{p^d}) = 0.$$

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d} \Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

DIAGONALES

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d} \Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n .$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d

DIAGONALES

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \dots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\dots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d}\Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\dots,i_n)} z^n.$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$.

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d} \Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$. On dit que $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est la diagonale d'une série algébrique si $f(z) \in \mathfrak{D}$.

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1}\cdots z_d^{i_d}\Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$. On dit que $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est la diagonale d'une série algébrique si $f(z) \in \mathfrak{D}$.

- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ et $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ alors $f_{|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ (Deligne(1984))

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1}\cdots z_d^{i_d}\Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n .$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$. On dit que $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est la diagonale d'une série algébrique si $f(z) \in \mathfrak{D}$.

- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ et $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ alors $f_{|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ (Deligne(1984))
- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ alors $f(z)$ est la diagonale d'une fraction rationnelle (Denef-Lipshitz(1985)).

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d}\Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$. On dit que $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est la diagonale d'une série algébrique si $f(z) \in \mathfrak{D}$.

- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ et $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ alors $f_{|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ (Deligne(1984))
- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ alors $f(z)$ est la diagonale d'une fraction rationnelle (Denef-Lipshitz(1985)). Alors, il existe $g(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_d) \cap \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]$ tq $\Delta_d(g(z_1, \ldots, z_d)) = f(z)$.

Diagonales

Soit $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1}\cdots z_d^{i_d}\Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

$\mathfrak{D}_d$ l'image de Δ_d et $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$. On dit que $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est la diagonale d'une série algébrique si $f(z) \in \mathfrak{D}$.

- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ et $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ alors $f_{|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ (Deligne(1984))
- Si $f(z) \in \mathfrak{D}$ alors $f(z)$ est la diagonale d'une fraction rationnelle (Denef-Lipshitz(1985)). Alors, il existe $g(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_d) \cap \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]$ tq $\Delta_d(g(z_1, \ldots, z_d)) = f(z)$. Alors presque tout nombre premier p, $g(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z_1, \ldots, z_d]]$ et ainsi $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ pour presque tout nombre premier p.

Question de Deligne

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, est-ce qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $p \in \mathcal{S}$, le degré d'algébricité de $f_{|p}$ est majoré par p^c ?

Question de Deligne

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, est-ce qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $p \in \mathcal{S}$, le degré d'algébricité de $f_{|p}$ est majoré par p^c ?

- Deligne donne un réponse affirmative quand $f(z) \in \mathfrak{D}_2$(1984).

Question de Deligne

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, est-ce qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $p \in \mathcal{S}$, le degré d'algébricité de $f_{|p}$ est majoré par p^c ?

- Deligne donne un réponse affirmative quand $f(z) \in \mathfrak{D}_2$(1984).
- Adamczewski-Bell donne une réponse affirmative pour toute $f(z)$ dans $\mathfrak{D}$(2013).

Question de Deligne

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, est-ce qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $p \in \mathcal{S}$, le degré d'algébricité de $f_{|p}$ est majoré par p^c ?

- Deligne donne un réponse affirmative quand $f(z) \in \mathfrak{D}_2$(1984).
- Adamczewski-Bell donne une réponse affirmative pour toute $f(z)$ dans $\mathfrak{D}$(2013).

Par exemple la G -fonction

$f_1(z) ={}_2F_1(1/2, 1/2; 1, z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{16^n}\binom{2n}{n}^2 z^n$, elle est la diagonale de

$$\frac{2}{2 - z_1 - z_2} \cdot \frac{2}{2 - z_2 - z_3}.$$

Question de Deligne

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, est-ce qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $p \in \mathcal{S}$, le degré d'algébricité de $f_{|p}$ est majoré par p^c ?

- Deligne donne un réponse affirmative quand $f(z) \in \mathfrak{D}_2$(1984).
- Adamczewski-Bell donne une réponse affirmative pour toute $f(z)$ dans $\mathfrak{D}$(2013).

Par exemple la G -fonction

$f_1(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 1, z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{16^n}\binom{2n}{n}^2 z^n$, elle est la diagonale de

$$\frac{2}{2 - z_1 - z_2} \cdot \frac{2}{2 - z_2 - z_3}.$$

Le degré d'algébricité de $f_{1|p}$ est majoré par p .

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$,

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) ={}_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) =_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Si $p \equiv 1 \mod 3, f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) =_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Si $p \equiv 1 \mod 3$, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et $f_{2|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ pour tout $p \equiv 1 \mod 3$.

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Si $p \equiv 1 \mod 3$, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et $f_{2|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ pour tout $p \equiv 1 \mod 3$. En effet, $f_{2|p} = A_p(z) f_{2|p}(z^p)$,

Par contre, il y a des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Si $p \equiv 1 \mod 3$, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et $f_{2|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ pour tout $p \equiv 1 \mod 3$. En effet, $f_{2|p} = A_p(z) f_{2|p}(z^p)$, où $A_p(z)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Ainsi, le degré d'algébricité de $f_{2|p}$ est majoré par p.

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction.

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini.

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini. Alors

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :

(i) $f_{|p}$ *est algébrique sur* $\mathbb{F}_p(z)$ *pour presque tout* $p \in \mathcal{S}$;

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :

(i) $f_{|p}$ *est algébrique sur* $\mathbb{F}_p(z)$ *pour presque tout* $p \in \mathcal{S}$;

(ii) *il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* p *vérifiant* (i), $\deg(f_{|p}) < p^c$.

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :

(i) $f_{|p}$ *est algébrique sur* $\mathbb{F}_p(z)$ *pour presque tout* $p \in \mathcal{S}$;

(ii) *il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* p *vérifiant* (i), $\deg(f_{|p}) < p^c$.

On sait que la conjecture est vraie pour les séries qui sont dans $\mathfrak{D}$ (Deligne, Adamczewski- Bell)

Conjecture de Adamczewski-Delaygue

D'après les résultats de Adamczewski, Bell et Delaygue , il y a des nombreuses séries qui ne sont pas dans $\mathfrak{D}$ pour lesquelles la réponse à la question de Deligne est vraie.

Conjecture (Adamczewski–Delaygue)

Soit $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers p tel que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :

(i) $f_{|p}$ *est algébrique sur* $\mathbb{F}_p(z)$ *pour presque tout* $p \in \mathcal{S}$;

(ii) *il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* p *vérifiant* (i), $\deg(f_{|p}) < p^c$.

On sait que la conjecture est vraie pour les séries qui sont dans $\mathfrak{D}$ (Deligne, Adamczewski- Bell) Également le travail de Adamczewski, Bell et Delaygue nous en fournit d'autres séries pour lesquelles la conjecture est vraie.

SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES

Nous montrons que la conjecture est vraie pour les séries hypergéométriques généralisées.

Séries hypergéométriques généralisées

Nous montrons que la conjecture est vraie pour les séries hypergéométriques généralisées. Rappelons que ces séries sont de la forme

$$ {}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) = \sum_{j \geq 0} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_n)_j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_{n-1})_j j!} z^j $$

Nous montrons que la conjecture est vraie pour les séries hypergéométriques généralisées. Rappelons que ces séries sont de la forme

$$ {}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) = \sum_{j \geq 0} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_n)_j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_{n-1})_j j!} z^j $$

où $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 1) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0})^n$

Théroème (I,Vargas-Montoya)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ *tels que pour tout* i, j, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$.

Théroème (I,Vargas-Montoya)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ *tels que pour tout* i, j, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$. *Soit* $d_{\alpha,\beta}$ *le plus petit commun multiple des dénominateurs des* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$

Théroème (I,Vargas-Montoya)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ *tels que pour tout* i, j*,* $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$*. Soit* $d_{\alpha,\beta}$ *le plus petit commun multiple des dénominateurs des* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*,* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *et soit* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des nombres premiers* p *tels que* p *ne divise pas* $d_{\alpha,\beta}$ *et* ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$*.*

Théroème (I,Vargas-Montoya)

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ tels que pour tout i, j, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$. Soit $d_{\alpha,\beta}$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Alors, pour tout $p \in \mathcal{S}$, la réduction modulo p de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par $p^{n^2\phi(d_{\alpha,\beta})}$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler.

Théroème (I,Vargas-Montoya)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ tels que pour tout i, j, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$. Soit $d_{\alpha,\beta}$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Alors, pour tout $p \in \mathcal{S}$, la réduction modulo p de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par $p^{n^2\phi(d_{\alpha,\beta})}$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler.

La démonstration de ce théorème repose sur la notion de la structure de Frobenius forte pour un opérateur différentiel.

Définition de Structure de Frobenius forte.

Définition de Structure de Frobenius forte.

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$ alors pour tout entier m strictement positif $y(z^{p^m})$ est solution de $\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m - 1} A(z^{p^m})$.

Définition de structure de Frobenius forte.

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$ alors pour tout entier m strictement positif $y(z^{p^m})$ est solution de $\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m-1} A(z^{p^m})$. Nous avons ainsi une action **naïve** de **Frobenius**,

- $y(z) \mapsto y(z^{p^m})$

Définition de structure de Frobenius forte.

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$ alors pour tout entier m strictement positif $y(z^{p^m})$ est solution de $\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m - 1} A(z^{p^m})$. Nous avons ainsi une action **naïve** de **Frobenius**,

- $y(z) \mapsto y(z^{p^m})$
- $A(z) \mapsto$

Définition de structure de Frobenius forte.

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$ alors pour tout entier m strictement positif $y(z^{p^m})$ est solution de $\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m-1} A(z^{p^m})$. Nous avons ainsi une action **naïve** de **Frobenius**,

- $y(z) \mapsto y(z^{p^m})$
- $A(z) \mapsto p^m z^{p^m-1} A(z^{p^m})$.

Définition de Structure de Frobenius forte.

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q}(z))$. Si $y(z)$ est solution de $\frac{d}{dz} - A$ alors pour tout entier m strictement positif $y(z^{p^m})$ est solution de $\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m - 1} A(z^{p^m})$. Nous avons ainsi une action **naïve** de **Frobenius**,

- $y(z) \mapsto y(z^{p^m})$
- $A(z) \mapsto p^m z^{p^m - 1} A(z^{p^m})$.

L'idée d'utiliser la notion de structure de Frobenius forte est de **comparer** les systèmes $\{\frac{d}{dz} - p^m z^{p^m - 1} A(z^{p^m})\}_{m \geq 0}$ entre eux.

Fixons l'opérateur différentiel

$$L = a_0(z)\frac{d}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz] \quad a_0(z) \neq 0 \tag{1}$$

Fixons l'opérateur différentiel

$$L = a_0(z)\frac{d}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz] \quad a_0(z) \neq 0 \tag{1}$$

Soit A la matrice compagnon de L.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n(z)}{a_0(z)} & -\frac{a_{n-1}(z)}{a_0(z)} & \dots & -\frac{a_1(z)}{a_0(z)} \end{pmatrix}.$$

Fixons l'opérateur différentiel

$$L = a_0(z)\frac{d}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz] \quad a_0(z) \neq 0 \tag{1}$$

Soit A la matrice compagnon de L. L'opérateur différentiel L possède une Structure de Frobenius forte pour p de période h

Fixons l'opérateur différentiel

$$L = a_0(z)\frac{d}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz] \quad a_0(z) \neq 0 \tag{1}$$

Soit A la matrice compagnon de L. L'opérateur différentiel L possède une Structure de Frobenius forte pour p de période h s'il existe h un entier positif non nul et $H \in Gl_n(E_p)$ tq

$$\frac{d}{dz}H = AH - H(p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})).$$

Fixons l'opérateur différentiel

$$L = a_0(z)\frac{d}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz] \quad a_0(z) \neq 0 \tag{1}$$

Soit A la matrice compagnon de L. L'opérateur différentiel L possède une Structure de Frobenius forte pour p de période h s'il existe h un entier positif non nul et $H \in Gl_n(E_p)$ tq

$$\frac{d}{dz}H = AH - H(p^h z^{p^h-1} A(z^{p^h})).$$

Le corps E_p est le corps des éléments analytiques qui est justement le complété de $\mathbb{C}_p(z)$ pour la norme de Gauss.

$$\left|\frac{\sum_i a_i z^i}{\sum_j b_j z^j}\right|_{\mathcal{G}} = \frac{sup|a_i|}{sup|b_j|}$$

Action Frobenius: Si L a une **structure de Frobenius forte** pour p de période h

Action Frobenius: Si L a une **structure de Frobenius forte** pour p de période h, il existe $h_1, \ldots, h_n \in E_p$ tels que pour toute solution de f de L,

$$h_1 f(z^{p^h}) + \cdots + h_n f^{(n-1)}(z^{p^h})$$

est solution de L. Cette application est $\mathbb{C}_p$-linéaire.

Action Frobenius: Si L a une **structure de Frobenius forte** pour p de période h, il existe $h_1, \ldots, h_n \in E_p$ tels que pour toute solution de f de L,

$$h_1 f(z^{p^h}) + \cdots + h_n f^{(n-1)}(z^{p^h})$$

est solution de L. Cette application est $\mathbb{C}_p$-linéaire.
En appliquant le théorème de Caley Hamilton on a,

Théroème (II)

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a(n) z^n \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ solution de L. Si L possède une structure de Frobenius forte pour p de période h alors, la série formelle $f_{|p}$ est une série algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ dont le degré d'algébricité est majoré par $p^{n^2 h}$.

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Pour montrer le théorème I, d'après le théorème II, il suffit de montrer que $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Pour montrer le théorème I, d'après le théorème II, il suffit de montrer que $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$. Sous les hypothèses du théorème I, nous avons que:

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Pour montrer le théorème I, d'après le théorème II, il suffit de montrer que $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$. Sous les hypothèses du théorème I, nous avons que:

- $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est fuchsien.

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Pour montrer le théorème I, d'après le théorème II, il suffit de montrer que $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$. Sous les hypothèses du théorème I, nous avons que:

- $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est fuchsien.
- Comme $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{Q}^n$alors les exposants aux points singuliers réguliers de $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ sont des nombres rationnels.

Vers la démonstration du théorème I

La série ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \quad \delta = z\frac{d}{dz}$$

Pour montrer le théorème I, d'après le théorème II, il suffit de montrer que $\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$. Sous les hypothèses du théorème I, nous avons que:

- $\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ est fuchsien.
- Comme $\underline{\alpha},\underline{\beta} \in \mathbb{Q}^n$alors les exposants aux points singuliers réguliers de $\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ sont des nombres rationnels.
- Puisque $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ donc le groupe de monodromie de $\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ est rigide. (Levelt).

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1). *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.*

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L *comme en* (1). *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. *Les points singuliers de L sont singuliers réguliers , c'est-à dire que* L *est fuchsien.*

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1). *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. *Les points singuliers de L sont singuliers réguliers , c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1). Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.

1. *Les points singuliers de L sont singuliers réguliers , c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1)*. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. *Les points singuliers* de L *sont singuliers réguliers , c'est-à dire que* L *est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie* de L *est rigide.*

Alors, l'opérateur différentiel L a une structure de Frobenius forte pour tout $p \in S_L$ de *période* h.

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1). Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.

1. *Les points singuliers de L sont singuliers réguliers , c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Alors, l'opérateur différentiel L a une structure de Frobenius forte pour tout $p \in S_L$ de période h.

Crew montre, via **cohomologie p-adique** que, si L vérifie ces 3 conditions et L est sur-convergent pour p alors, L a une structure de Frobenius forte pour p de période $\phi(d)$.

Rigidité.

Théroème (III Crew,Vargas-Montoya)

Soit L comme en (1). Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.

1. *Les points singuliers de L sont singuliers réguliers , c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Alors, l'opérateur différentiel L a une structure de Frobenius forte pour tout $p \in S_L$ de période h.

Notre démonstration repose sur une approche introduite par Salinier qui est fondée sur la théorie classique des équations différentielles sur $\mathbb{C}(z)$ et $\mathbb{C}_p(z)$.

Construction de l'ensemble S_L et de h

Soit L comme en (1).

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE S_L ET DE h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE S_L ET DE h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.
- Le terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$ a norme p-adique égale à 1, où s est la valuation de $a_0(z)$.

Construction de l'ensemble S_L et de h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.
- Le terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$ a norme p-adique égale à 1, où s est la valuation de $a_0(z)$.
- La norme p-adique des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L est égale à 1. Et la norme de Gauss de $\frac{a_i(z)}{a_0(z)}$ est inférieure ou égale à 1 pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE S_L ET DE h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.
- Le terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$ a norme p-adique égale à 1, où s est la valuation de $a_0(z)$.
- La norme p-adique des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L est égale à 1. Et la norme de Gauss de $\frac{a_i(z)}{a_0(z)}$ est inférieure ou égale à 1 pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Posons $h = \phi(d)h_2$

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE S_L ET DE h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.
- Le terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$ a norme p-adique égale à 1, où s est la valuation de $a_0(z)$.
- La norme p-adique des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L est égale à 1. Et la norme de Gauss de $\frac{a_i(z)}{a_0(z)}$ est inférieure ou égale à 1 pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Posons $h = \phi(d)h_2$, où d est le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants aux points singuliers

Construction de l'ensemble S_L et de h

Soit L comme en (1). Nous posons $\mathcal{S}_L$ comme l'ensemble formé pour les nombres premiers p tels que:

- Le coefficient leader de $a_0(z)$ et le discriminant de $a_0(z)$ ont norme p-adique égale à 1.
- Le terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$ a norme p-adique égale à 1, où s est la valuation de $a_0(z)$.
- La norme p-adique des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L est égale à 1. Et la norme de Gauss de $\frac{a_i(z)}{a_0(z)}$ est inférieure ou égale à 1 pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Posons $h = \phi(d)h_2$, où d est le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants aux points singuliers et h_2 est la dimension du corps de décomposition de $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}$.

Comme nous l'avons mentionné, sous les conditions du théorème I, l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_n) + (\delta + \beta_1 - 1) \cdots (\delta + \beta_n - 1),$$

Démonstration du théorème I

Comme nous l'avons mentionné, sous les conditions du théorème I, l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1),$$

satisfait aux conditions 1, 2 et 3 décrites dans le théorème III.
De plus:

Démonstration du théorème I

Comme nous l'avons mentionné, sous les conditions du théorème I, l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n) + (\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1),$$

satisfait aux conditions 1, 2 et 3 décrites dans le théorème III.
De plus:

- $S_{\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}$ est l'ensemble des nombre premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et $h = \phi(d_{\alpha,\beta})$.

Démonstration du théorème I

Comme nous l'avons mentionné, sous les conditions du théorème I, l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1),$$

satisfait aux conditions 1, 2 et 3 décrites dans le théorème III.
De plus:

- $S_{\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ est l'ensemble des nombre premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et $h=\phi(d_{\alpha,\beta})$.

Donc:

- D'après le théorème III, l'opérateur différentiel $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in S_{\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$.

Démonstration du théorème I

Comme nous l'avons mentionné, sous les conditions du théorème I, l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_n) + (\delta + \beta_1 - 1) \cdots (\delta + \beta_n - 1),$$

satisfait aux conditions 1, 2 et 3 décrites dans le théorème III.
De plus:

- $S_{\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ est l'ensemble des nombre premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et $h = \phi(d_{\alpha,\beta})$.

Donc:

- D'après le théorème III, l'opérateur différentiel $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in S_{\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ de période $\phi(d_{\alpha,\beta})$.
- Ainsi, il découle du théorème II que, la réduction modulo p de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ dont le degré d'algébricité est majorée par $p^{n^2\phi(d_{\alpha,\beta})}$.

Exemple

Considérons la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/3, 1/2; 5/12, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/3)_k (1/2)_k}{(5/12)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

EXEMPLE

Considérons la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/3, 1/2; 5/12, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/3)_k (1/2)_k}{(5/12)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Cette série n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ et elle n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue.

EXEMPLE

Considérons la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/3, 1/2; 5/12, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/3)_k (1/2)_k}{(5/12)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Cette série n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ et elle n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue. Par contre, si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des nombres premiers p congruents à 1 modulo 12 alors $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ pour tout $p \in \mathcal{S}$

Exemple

Considérons la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/3, 1/2; 5/12, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/3)_k (1/2)_k}{(5/12)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Cette série n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ et elle n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue. Par contre, si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des nombres premiers p congruents à 1 modulo 12 alors $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ pour tout $p \in \mathcal{S}$ et de plus, $d_{\alpha,\beta} = 12$.

Exemple

Considérons la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/3, 1/2; 5/12, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/3)_k (1/2)_k}{(5/12)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Cette série n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ et elle n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue. Par contre, si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des nombres premiers p congruents à 1 modulo 12 alors $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ pour tout $p \in \mathcal{S}$ et de plus, $d_{\alpha,\beta} = 12$.

D'après le théorème I, si $p \in \mathcal{S}$, alors $f_{2|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ dont le degré d'algébricité est majoré par p^{16}.

Exemple-Conjecture de Christol

Une série $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée s'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ non nuls tels que $af(bz) \in \mathbb{Z}[[z]]$

Une série $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée s'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ non nuls tels que $af(bz) \in \mathbb{Z}[[z]]$

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

Exemple-Conjecture de Christol

Une série $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée s'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ non nuls tels que $af(bz) \in \mathbb{Z}[[z]]$

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

La conjecture est encore ouverte. Par exemple la série

$$f_3(z) :=_3 F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k (4/9)_k (5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

est globalement bornée car $f_3(27z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ mais jusqu'à présent nous ne savons pas si $f_3(z) \in \mathfrak{D}$.

EXEMPLE-CONJECTURE DE CHRISTOL

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

La conjecture est encore ouverte. Par exemple la série

$$f_3(z) :={}_3F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k (4/9)_k (5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

est globalement bornée car $f_3(27z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ mais jusqu'à présent nous ne savons pas si $f_3(z) \in \mathfrak{D}$. De plus, cette série n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue.

Exemple-Conjecture de Christol

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

La conjecture est encore ouverte. Par exemple la série

$$f_3(z) :={}_3 F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k (4/9)_k (5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

est globalement bornée car $f_3(27z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ mais jusqu'à présent nous ne savons pas si $f_3(z) \in \mathfrak{D}$. De plus, cette série n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue.

Notons que dans ce cas, $d_{\alpha,\beta} = 9$

EXEMPLE-CONJECTURE DE CHRISTOL

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

La conjecture est encore ouverte. Par exemple la série

$$f_3(z) :=_3 F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k (4/9)_k (5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

est globalement bornée car $f_3(27z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ mais jusqu'à présent nous ne savons pas si $f_3(z) \in \mathfrak{D}$. De plus, cette série n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue.
Notons que dans ce cas, $d_{\alpha,\beta} = 9$ donc, d'après le théorème I, pour tout nombre premier $p \neq 3$ la série $f_{3|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$

Exemple-Conjecture de Christol

Conjecture (Christol)

Si $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ est globalement bornée et $f(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{D} \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ alors $f(z) \in \mathfrak{D}$.

La conjecture est encore ouverte. Par exemple la série

$$f_3(z) :=_3 F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k(4/9)_k(5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

est globalement bornée car $f_3(27z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ mais jusqu'à présent nous ne savons pas si $f_3(z) \in \mathfrak{D}$. De plus, cette série n'est pas dans la classe de séries étudiée par Adamczewski, Bell et Delaygue.

Notons que dans ce cas, $d_{\alpha,\beta} = 9$ donc, d'après le théorème I, pour tout nombre premier $p \neq 3$ la série $f_{3|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ dont le degré d'algébricité est majoré par p^{54}.

Indépendance algébrique

- Indépendance algébrique

P-LUCAS

La série $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si:

p-LUCAS

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$,

p-Lucas

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]], a_0 = 1$

p-Lucas

La série $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

p-Lucas

La série $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

p-Lucas

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par exemple les séries suivantes sont p-Lucas pour tout nombre premier.

p-LUCAS

La série $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par exemple les séries suivantes sont p-Lucas pour tout nombre premier.

- $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$

p-LUCAS

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par exemple les séries suivantes sont p-Lucas pour tout nombre premier.

- $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$,
- La série génératrice des nombres de Apéry $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par exemple les séries suivantes sont p-Lucas pour tout nombre premier.

- $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$,
- La série génératrice des nombres de Apéry $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$

La série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ est p-Lucas si et seulement si,

$$f_{|p}(z) = A(z) f_{|p}(z)^p,$$

La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas si: la série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, $a_0 = 1$ et pour tout entier positif m et tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$a_{mp+r} \equiv a_m a_r \mod p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par exemple les séries suivantes sont p-Lucas pour tout nombre premier.

- $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$,
- La série génératrice des nombres de Apéry $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$

La série $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ est p-Lucas si et seulement si,

$$f_{|p}(z) = A(z) f_{|p}(z)^p,$$

où $A(z) = \sum_{n=0}^{p-1} (a_n \mod p) z^n$.

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers, $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers, $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

- $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers, $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

- $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$
- *Il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$ tq*

$$f_{|p}(z) = A_p(z) f_{|p}(z)^{p^l}$$

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers, $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

- $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$
- *Il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$ tq*

$$f_{|p}(z) = A_p(z) f_{|p}(z)^{p^l}$$

- *La hauteur de $A_p(z)$ est inférieure ou égale à Cp^l, où C est une constante indépendante de p.*

Définition (Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers, $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

- $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$
- *Il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$ tq*

$$f_{|p}(z) = A_p(z) f_{|p}(z)^{p^l}$$

- *La hauteur de $A_p(z)$ est inférieure ou égale à Cp^l, où C est une constante indépendante de p.*

Remarquons que si $f(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ est p-Lucas pour tout $p \in \mathcal{S}$ alors $f(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème (IV Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini*.

Indépendance algébrique

Théroème (IV Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors, $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ si et seulement s'il existe $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $f_1(z)^{m_1} \cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Théroème (IV Adamczewki-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini. Alors,* $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ *sont algébriquement dépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$ *si et seulement s'il existe* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ *non tous nuls tels que* $f_1(z)^{m_1} \cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (I)

Les séries $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$

Théroème (IV Adamczewki-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z),\ldots,f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini. Alors,* $f_1(z),\ldots,f_r(z)$ *sont algébriquement dépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$ *si et seulement s'il existe* $m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{Z}$ *non tous nuls tels que* $f_1(z)^{m_1}\cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (I)

Les séries $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Théroème (IV Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors, $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ si et seulement s'il existe $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $f_1(z)^{m_1} \cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (I)

Les séries $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$.

Afin d'appliquer le théorème IV

Théroème (IV Adamczewski-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \dots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini. Alors,* $f_1(z), \dots, f_r(z)$ *sont algébriquement dépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$ *si et seulement s'il existe* $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ *non tous nuls tels que* $f_1(z)^{m_1} \cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (I)

Les séries $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Afin d'appliquer le théorème IV une question naturelle est de savoir quand une série $f(z)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème (IV Adamczewki-Bell-Delaygue)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors, $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ si et seulement s'il existe $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $f_1(z)^{m_1} \cdots f_r(z)^{m_r} \in \mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (I)

Les séries $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$.

Afin d'appliquer le théorème IV une question naturelle est de savoir quand une série $f(z)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{S})$. Dans l'essaie de répondre à cette question nous obtenons le résultat suivant.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Théroème (V Vargas-Montoya)

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini.

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Théroème (V Vargas-Montoya)

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que l'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Théroème (V Vargas-Montoya)

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que l'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini et pour tout $p \in \mathcal{S}'$ il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Théroème (V Vargas-Montoya)

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que l'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini et pour tout $p \in \mathcal{S}'$ il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$ tq

$$f_{|p}(z) = A_p(z) f_{|p}(z)^{p^l},$$

Monodromie MUM

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini de nombres premiers. L'ensemble $FMUM(\mathcal{S})$ est constitué des séries $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que:

- Pour tout $p \in \mathcal{S}, f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.
- $f(z)$ annule un opérateur $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{S}$.
- $f(z)$ annule un opérateur MUM en zéro.

Théroème (V Vargas-Montoya)

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que l'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini et pour tout $p \in \mathcal{S}'$ il existe un entier $l > 0$ et une fraction rationnelle $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z) \cap \mathbb{F}_p[[z]]$ tq

$$f_{|p}(z) = A_p(z) f_{|p}(z)^{p^l},$$

où la hauteur de $A_p(z)$ est inférieure ou égale à Cp^{2l}, où C est une constante indépendante de p.

La série hypergéométrique ${}_2F_1(1/2, -1/2, 1, 16z)$

Considérons la

$$\mathfrak{f} :={}_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

La série hypergéométrique ${}_2F_1(1/2, -1/2, 1, 16z)$

Considérons la

$$\mathfrak{f} :=_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1, 1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Considérons la

$$\mathfrak{f} :=_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1, 1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro

La série hypergéométrique ${}_2F_1(1/2, -1/2, 1, 16z)$

Considérons la

$$\mathfrak{f} :=_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1, 1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro et d'après le théorème III, il est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

La série hypergéométrique ${}_2F_1(1/2, -1/2, 1, 16z)$

Considérons la

$$\mathfrak{f} :=_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1,1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro et d'après le théorème III, il est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $\mathfrak{f}(z)$ appartient à $FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.

Considérons la

$$\mathfrak{f} :=_2 F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1, 1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro et d'après le théorème III, il est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $\mathfrak{f}(z)$ appartient à $FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.
Par contre, $\mathfrak{f}$ n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.

Considérons la

$$\mathfrak{f} := {}_2F_1(1/2, -1/2, 1, 16z) = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2, -1/2), (1, 1)) : -16z(\delta - 1/2)(\delta + 1/2) + \delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro et d'après le théorème III, il est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $\mathfrak{f}(z)$ appartient à $FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.
Par contre, $\mathfrak{f}$ n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Donc, nous ne pouvons pas appliquer le théorème IV aux séries qui sont dans $FMUM(\mathcal{S})$.

LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ${}_2F_1(1/2,-1/2,1,16z)$

Considérons la

$$\mathfrak{f} := {}_2F_1(1/2,-1/2,1,16z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]].$$

Cette série annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}((1/2,-1/2),(1,1)) : -16z(\delta-1/2)(\delta+1/2)+\delta^2.$$

Cette opérateur est MUM en zéro et d'après le théorème III, il est muni d'une structure de Frobenius forte pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $\mathfrak{f}(z)$ appartient à $FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.
Par contre, $\mathfrak{f}$ n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Donc, nous ne pouvons pas appliquer le théorème IV aux séries qui sont dans $FMUM(\mathcal{S})$.
Par contre nous réussissons à établir le critère suivant d'indépendance algébrique pour les séries qui sont dans $FMUM(\mathcal{S})$.

Indépendance algébrique

Pour un nombre premier p, soit $\Lambda_p(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 0} a_{np} z^n$.

Pour un nombre premier p, soit $\Lambda_p(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 0} a_{np} z^n$.

Théroème (VI, Vargas-Montoya)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini*

Pour un nombre premier p, soit $\Lambda_p(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 0} a_{np} z^n$.

Théroème (VI, Vargas-Montoya)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini et soient $g_1(z), \ldots, g_r(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $g_i(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

Pour un nombre premier p, soit $\Lambda_p(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 0} a_{np} z^n$.

Théroème (VI, Vargas-Montoya)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ *infini et soient* $g_1(z), \ldots, g_r(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ *telles que pour tout* $p \in \mathcal{S}$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$, $g_i(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. *Supposons que pour tout* $p \in \mathcal{S}$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *il existe un entier* $l_{p,i} > 0$ *tel que* $\Lambda_p^{2l_{p,i}}(f_{i|p}) = g_{i|p} = \Lambda_p^{l_{p,i}}(f_{i|p})$.

Pour un nombre premier p, soit $\Lambda_p(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 0} a_{np} z^n$.

Théroème (VI, Vargas-Montoya)

Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini et soient $g_1(z), \ldots, g_r(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ telles que pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $g_i(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Supposons que pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ il existe un entier $l_{p,i} > 0$ tel que $\Lambda_p^{2l_{p,i}}(f_{i|p}) = g_{i|p} = \Lambda_p^{l_{p,i}}(f_{i|p})$. Si $g_1, \ldots, g_r$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ alors $f_1, \ldots, f_r$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$.

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Indépendance algébrique

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$. Montrons que $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble infini de nombres premiers.

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right)z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$. Montrons que $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble infini de nombres premiers.

a). Comme $\mathfrak{t}(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ alors pour tout nombre premier p, $\mathfrak{t}(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P}\setminus\{2\})$. Montrons que $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble infini de nombres premiers.

a). Comme $\mathfrak{t}(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ alors pour tout nombre premier p, $\mathfrak{t}(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

b). Il est connu que $\mathfrak{t}(z) \in \mathfrak{D}$

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P} \setminus \{2\})$. Montrons que $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble infini de nombres premiers.

a). Comme $\mathfrak{t}(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ alors pour tout nombre premier p, $\mathfrak{t}(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

b). Il est connu que $\mathfrak{t}(z) \in \mathfrak{D}$ par conséquent, d'après Christol (1984-1985), $\mathfrak{t}(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p.

Corollaire (II)

Les séries $\mathfrak{f}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}^2 z^n$, $\mathfrak{t}(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right) z^n$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(z)$.

Comme nous l'avons déjà vu $\mathfrak{f}(z) \in FMUM(\mathcal{P}\setminus\{2\})$. Montrons que $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble infini de nombres premiers.

a). Comme $\mathfrak{t}(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ alors pour tout nombre premier p, $\mathfrak{t}(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$.

b). Il est connu que $\mathfrak{t}(z) \in \mathfrak{D}$ par conséquent, d'après Christol (1984-1985), $\mathfrak{t}(z)$ annule un opérateur différentiel $\mathcal{H}$ muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p.

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$.

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$. Soit $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$.

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$. Soit $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}^2 z^n$. Notons que pour tout nombre premier p,

$$\Lambda_p^2(\mathfrak{f}_{|p}) = \mathfrak{g}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{f}_{|p})$$

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$. Soit $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$. Notons que pour tout nombre premier p,

$$\Lambda_p^2(\mathfrak{f}_{|p}) = \mathfrak{g}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{f}_{|p}) \text{ et } \Lambda_p^2(\mathfrak{t}_{|p}) = \mathfrak{t}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{t}_{|p}).$$

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$. Soit $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$. Notons que pour tout nombre premier p,

$$\Lambda_p^2(\mathfrak{f}_{|p}) = \mathfrak{g}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{f}_{|p}) \text{ et } \Lambda_p^2(\mathfrak{t}_{|p}) = \mathfrak{t}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{t}_{|p}).$$

D'après le corollaire I, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$

c). $\mathfrak{t}(z)$ annule l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} : (1-34z+z^2)z^2\frac{dz}{dz^3}+(3-153z+6z^2)z\frac{d}{dz^2}+(1-112z+7z^2)\frac{d}{dz}-5+z.$$

Cet opérateur est MUM en zéro
Ainsi $\mathfrak{t}(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble infini de nombres qui munissent $\mathcal{H}$ d'une structure de Frobenius forte.
Par conséquent, $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont dans $FMUM(\mathcal{S})$. Soit $\mathfrak{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}^2 z^n$. Notons que pour tout nombre premier p,

$$\Lambda_p^2(\mathfrak{f}_{|p}) = \mathfrak{g}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{f}_{|p}) \text{ et } \Lambda_p^2(\mathfrak{t}_{|p}) = \mathfrak{t}_{|p} = \Lambda_p(\mathfrak{t}_{|p}).$$

D'après le corollaire I, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ alors, il découle du théorème VI que, les séries $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{t}(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$.

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini.

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Si pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe un entier $l > 0$ tel que $\Lambda_p^l(f_{|p}) = f_{|p}$

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Si pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe un entier $l > 0$ tel que $\Lambda_p^l(f_{|p}) = f_{|p}$ alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Si pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe un entier $l > 0$ tel que $\Lambda_p^l(f_{|p}) = f_{|p}$ alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini

Finalement nous obtenons un critère que nous permet savoir quand une série qui appartient à $FMUM(\mathcal{S})$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Théroème

Soit $f(z) \in FMUM(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ infini. Si pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe un entier $l > 0$ tel que $\Lambda_p^l(f_{|p}) = f_{|p}$ alors il existe $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ infini tel que $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ est fini et $f(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}')$.