Sur la théorie géométrique des G-fonctions

(Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables)

par

Lucia Di Vizio

Institut de Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, case 247,
4 place Jussieu, F-75252 PARIS CEDEX 05 - FRANCE
e-mail: divizio@math.jussieu.fr

§0. Introduction.

La notion de G-fonction a été introduite par C.L. Siegel en 1929. Dans les années quatre-vingts la théorie des G-fonctions (à une variable) a repris une nouvelle force, grâce aux travaux de E. Bombieri, D.V. et G.V. Chudnovsky, Y. André et B. Dwork, qui ont, entre autre, mis en évidence ses liens avec la géométrie arithmétique. Un des piliers de cette théorie est le théorème de Chudnovsky [1, VI] rappelé ci-dessous. Il joue aussi un rôle fondamental dans la théorie des séries Gevrey de type arithmétique développée par Y. André(1).

Donnons brièvement quelques définitions. Soient K un corps de nombres et $\mathcal{V}_K$ son anneau des entiers. On appelle G-fonction une série formelle $y=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ à coefficients dans K, telle que :
1) il existe $\mathcal{L}\in K\left[x,\frac{d}{dx}\right]$ qui annule y : $\mathcal{L}y=0$;
2) pour toute immersion $K\hookrightarrow\mathbb{C}$, la série entière y a rayon de convergence non nul, en tant que série à coefficients complexes;
3) il existe une suite de nombres entiers positifs $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une constante C réelle positive telles que $N_n a_s\in\mathcal{V}_K$ pour tout $s\leq n$ et telles que $N_n\leq C^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On considère maintenant un opérateur différentiel

$$\mathcal{L}=\sum_{i=0}^{\mu} A_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i \in K\left[x,\frac{d}{dx}\right] .$$

On peut construire une suite d'opérateurs $(\mathcal{L}_n)_{n\geq 1}$ telle que $\mathcal{L}_n$ est l'unique opérateur divisible à droite par $\mathcal{L}$ et de la forme :

$$\mathcal{L}_n=\frac{A_\mu(x)^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu+n-1}+\sum_{i=0}^{\mu-1} A_{i,n}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i ,\ \text{avec } A_{i,n}(x)\in K[x].$$

On dit que $\mathcal{L}$ est un G-opérateur ou un opérateur de type G s'il existe une suite de nombres entiers positifs $(N_n)_{n\geq 1}$ et une constante C réelle positive telles que $N_n A_{i,s}\in\mathcal{V}_K[x]$ pour tout $s\leq n$ et $i=0,\dots,\mu-1$ et telles que $N_n\leq C^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Le théorème de Chudnovsky dit que l'opérateur minimal qui annule une G-fonction donnée est de type G; cela, grâce à [8, 13.0] et à [6], implique le théorème suivant :

(1) *"Séries Gevrey de type arithmétique I et II"*, Annals of Mathematics, 151 (2000), 705-756.

Théorème 0.1. *L'opérateur différentiel minimal qui annule une G-fonction donnée est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont rationnels.*

Dans ce papier nous généralisons à plusieurs variables le théorème de Chudnovsky que nous venons d'énoncer (*cf.* Th. 4.1), dans un contexte plus géométrique, qui a été introduit par Y. André et F. Baldassarri dans [2]. Nous déduisons des résultats de [3] une généralisation de [8, 13.0] (*cf.* App. A), qui, avec [5], nous permettra d'obtenir l'analogue à plusieurs variable de (0.1).

Nous envisageons cet article comme une contribution à la construction d'une théorie des opérateurs arithmétiques à plusieurs variables, obtenus à partir des G-opérateurs par transformation de Fourier partielle, et pour laquelle notre résultat devrait être un outil essentiel. Le but de cette théorie pourrait être le développement de techniques qui permettent d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique des valeurs des fonctions de la forme :

$$f(x,y) = P(e^x, {}_2F_1(a,b,c;y)) \ , \ \text{avec } a,b,c \in \mathbb{Q},$$

où $P(T)$ est un polynôme, les valeurs d'une telle fonction étant liées à e et π.

Remerciements. L'auteur tient spécialement à remercier Y. André pour lui avoir suggeré de travailler sur ce sujet et pour son assistance tout le long de la préparation du présent papier. Elle remercie aussi D. Bertrand pour ses remarques sur le texte et Z. Djadli pour son cyclopéen travail de correction des fautes de français.

Cet article est organisé comme suit :

§1. Notations
§2. Modules différentiels de type G
§3. G-fonctions
§4. Enoncé du théorème principal
§5. Démonstration du théorème (4.1)
Appendice A. Régularité des modules différentiels de type G
Appendice B. Lemme du Wronskien à plusieurs variables

§1. Notations.

1.1. Soient K un corps de nombres et $\mathcal{V}_K$ l'anneau des entiers de K. On utilise la notation $|\ |_v$ pour une valeur absolue v-adique de K telle que $v|p$, où p est un premier de $\mathbb{Z}$, ou pour une norme qui induit une norme archimédienne sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas non-archimédien on normalise $|\ |_v$ de la façon suivante :

$$|p|_v = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]} \ ,$$

où K_v est le complété de K par rapport à $|\ |_v$ et $v|p$. De façon similaire, dans le cas archimédien, on normalise $|\ |_v$ en posant :

$$|x|_v = \begin{cases} |x|_{\mathbb{R}}^{1/[K:\mathbb{Q}]} & \text{si } K_v = \mathbb{R} \\ |x|_{\mathbb{C}}^{2/[K:\mathbb{Q}]} & \text{si } K_v = \mathbb{C} \end{cases} .$$

On remarque que pour ce choix de normalisation la Formule du Produit est valable :

$$\prod_v |x|_v = 1 \ , \ \forall \ x \in K.$$

On note Σ_f l'ensemble des v tels que $v|p$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et Σ_∞ l'ensemble des v tels que $|\ |_v$ étend la norme archimédienne de $\mathbb{Q}$.

1.2. Dans la suite on utilisera les notations suivantes :
X=K-schéma lisse de dimension relative d, de type fini et géométriquement connexe.
$\mathcal{F} = \kappa(X)$= corps des fonctions rationnelles sur X.
Soient $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ des coordonnées étales locales sur X et $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $i = 1, \ldots, d$.
On note $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ les éléments de $\mathbb{N}^d$ et pour tout $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{N}^d$ on pose :

$$|\underline{\alpha}| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \ , \ \underline{\alpha}! = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i! \ ,$$

$$\underline{\alpha} \leq \underline{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, d$$

$$\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \ , \text{ si } \underline{\alpha} \geq \underline{\beta}$$

$$\underline{x}^{\underline{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \ , \ \underline{D}^{\underline{\alpha}} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \ .$$

On note, enfin, $\underline{1}_i \in \mathbb{N}^d$ le multi-indice ayant toutes les entrées nulles sauf la i-ème égale à 1.

§2. Modules différentiels de type G.

2.1. Soit $(\mathcal{M}, \nabla)$ un X/K-module différentiel localement libre de rang μ, muni de la connexion intégrable[(2)] ∇. On appelle (M, ∇) sa fibre au point générique de X. On observe que, étant donné un $\mathcal{F}/K$-module différentiel (M, ∇), on peut toujours trouver un schéma X/K convenable, tel qu'il existe un X/K-module différentiel $(\mathcal{M}, \nabla)$ libre muni d'une connexion intégrable ∇, dont (M, ∇) est la fibre au point générique, et tel que X admet des coordonnées étales globales $\underline{x}$: donc dans la suite on supposera que $(\mathcal{M}, \nabla)$ est libre sur X et que X admet des coordonnées étales globales.

Soit $\underline{e}$ une base de $\mathcal{M}$, telle que :

$$\frac{1}{\underline{\alpha}!} \nabla \left(\underline{D}\right)^{\underline{\alpha}} \underline{e} = \underline{e} G_{\underline{\alpha}} \ , \ \text{ avec } G_{\underline{\alpha}} \in M_{\mu \times \mu}\left(\mathcal{O}(X)\right).$$

Les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ sont liées entre elles par la relation de récurrence :

$$G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \frac{1}{\alpha_i + 1} \left(D_i G_{\underline{\alpha}} + G_{\underline{1}_i} G_{\underline{\alpha}}\right) \ , \text{ pour tout } \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d \text{ et pour tout } i = 1, \ldots, d. \tag{2.1.1}$$

Définition 2.2. *On choisit un sous-schéma ouvert S de* $\operatorname{Spec}(\mathcal{V}_K)$ *et un S-schéma lisse X_S, de type fini, à fibres connexes et tel que $X_S \times_S$* $\operatorname{Spec}(K) = X$. *On note Σ_S l'ensemble des points fermés de S. Pour tout $v \in \Sigma_S$, on considère la norme $|\ |_{X,v}$ sur $\mathcal{F}$ associée à l'anneau local de X_S dans le point générique de la fibre spéciale de X_S sur v, normalisée de façon qu'elle étende $|\ |_v$[(3)]. On pose :*

$$h(\mathcal{M}, n, v) = \sup_{|\underline{\alpha}| \leq n} \log^+ |G_{\underline{\alpha}}|_{X,v} \ , \ \textit{pour tout } v \in \Sigma_S,$$

(2) Dans la suite nous omettrons de rappeler que l'on considère toujours des connexions intégrables.

(3) Si X est un sous-schéma ouvert de l'espace affine de dimension d sur K, la norme $|\ |_{X,v}$ est la norme de Gauss usuelle sur $K(\underline{x})$=$\kappa(X)$, définie par :

$$\left| \frac{\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}} b_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}} \right|_{v,Gauss} = \frac{\sup_{\underline{\alpha}} |a_{\underline{\alpha}}|_v}{\sup_{\underline{\beta}} |b_{\underline{\beta}}|_v} \ .$$

où $\log^+ x = \log\sup(1,x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et la norme de la matrice* $G_{\underline{\alpha}}$ *est égale au maximum de la norme de ses éléments. On appelle taille de* $(\mathcal{M},\nabla)$ *le nombre suivant :*

$$\sigma_S(\mathcal{M}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_S} h(\mathcal{M},n,v) \ .$$

On dit que $(\mathcal{M},\nabla)$ *est un module différentiel de type* G *s'il satisfait la condition de Galočkin :*

$$\sigma_S(\mathcal{M}) < \infty \ .$$

On dit qu'un $\mathcal{F}/K$*-module différentiel* (M,∇) *est de type* G *s'il existe un module différentiel libre* $(\mathcal{M},\nabla)$ *sur un schéma* X/K *convenable tel que* $(\mathcal{M},\nabla)$ *est un module différentiel de type* G.

On appelle rayon de convergence générique v*-adique de* $(\mathcal{M},\nabla)$ *(ou de* (M,∇)*) le nombre :*

$$R_v(\mathcal{M}) = \inf\left(1, \liminf_{|\underline{\alpha}|\to\infty} |G_{\underline{\alpha}}|_{X,v}^{-1/|\underline{\alpha}|}\right) \ , \ \textit{pour tout } v \in \Sigma_S,$$

et rayon inverse global le nombre :

$$\varrho_S(\mathcal{M}) = \sum_{v\in\Sigma_S} \log^+ \frac{1}{R_v(\mathcal{M})} \ .$$

On dit que $(\mathcal{M},\nabla)$ *vérifie la condition de Bombieri si* $\varrho_S(\mathcal{M})$ *est fini.*

Remarque 2.3. On sait (*cf.* [5]) que $h(\mathcal{M},n,v)$ et $R_v(\mathcal{M})$ sont indépendants du choix des coordonnées étales $\underline{x}$ sur X et ne dépendent que de la fibre générique (M,∇) de $(\mathcal{M},\nabla)$. De plus $R_v(\mathcal{M})$ est indépendant du choix de la base $\underline{e}$ de $\mathcal{M}$.

De même, $\sigma_S(\mathcal{M})$ et $\varrho_S(\mathcal{M})$ ne dépendent que de X_S et de (M,∇) et ils sont indépendants du choix de $\underline{x}$ et $\underline{e}$. Enfin, les conditions de Galočkin et de Bombieri sont équivalentes et ne dépendent que de la fibre géométrique de $\mathcal{M}$, donc ne dependent pas du choix de S (*cf.* [5]).

Par souci de simplicité nous donnons ici une définition algébrique de la notion de régularité et de la notion d'exposants dans les cas de plusieurs variables. C'est une des définitions données dans [3].

Soit Z un diviseur irréductible et lisse de X, $i_Z : Z \hookrightarrow X$ l'immersion fermée de Z dans X, η_Z le point générique de Z et $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_d)$ des coordonnées étales sur X, telles que Z est le sous-schéma fermé d'équation $x_1 = 0$. Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\eta_Z}$ de X en η_Z est un anneau de valuation discrète de $\mathcal{F}$ avec uniformisant x_1, on peut lui associer une valeur absolue $|\ |_{X,Z}$, telle que $|x_1|_{X,Z} \in (0,1)$ et :

$$\mathcal{O}_{X,\eta_Z} = \{x \in \mathcal{F} : \ |x|_{X,Z} \le 1\} \ .$$

On pose :

$$D_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \ D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \ D_d = \frac{\partial}{\partial x_d} \ .$$

Soit $C = \mathcal{F}^{D_1} \subset \mathcal{F}$ le corps des constantes de D_1; C a degré de transcendance $d-1$ sur K, il est algébriquement clos dans $\mathcal{F}$ et $C^\times \subset \mathcal{O}_{X,\eta_Z}^\times$. Soit $\hat{\mathcal{F}}$ le completé x_1-adique de $\mathcal{F}$ et soit C' la clôture algébrique de C dans $\hat{\mathcal{F}}$. Alors C' est isomorphe au corps résiduel de $|\ |_{X,Z}$, il est une extension algébrique de C et $\hat{\mathcal{F}} \cong C'((x_1))$. On note $(\hat{M},\hat{\nabla})$ le $\hat{\mathcal{F}}/K$-module différentiel obtenu de (M,∇) par passage au completé.

Définition 2.4. *On dit que* $(\mathcal{M}, \nabla)$ *est singulier régulier en* Z *si le* $\hat{\mathcal{F}}/C'$*-module différentiel obtenu de* $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ *par restriction de* ∇ *aux dérivations de* $\hat{\mathcal{F}}/C'$ *est singulier régulier dans le sens de* [8, §11], *i.e. s'il existe une base* $\underline{e}$ *de* $\hat{M}$ *sur* $\hat{\mathcal{F}}$ *telle que :*

$$\nabla(D_1)\,\underline{e} = \underline{e}\mathcal{H}_1 \ , \ \text{avec } \mathcal{H}_1 \in M_{\mu\times\mu}(C').$$

On appelle exposants de $(\mathcal{M}, \nabla)$ *en* Z *l'image des valeurs propres de* $\mathcal{H}_1$ *dans la clôture algébrique de* C' *modulo* $\mathbb{Z}$. *On sait (cf.* [3, App. A et 6.1.3]*) qu'ils ne dépendent pas du choix de* $\underline{e}$ *et sont en fait dans la clôture algébrique de* K *modulo* $\mathbb{Z}$.

Dans l'Appendice A nous allons donner une démonstration du résultat suivant :

Corollaire 2.5. *Un module différentiel de type* G *est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont dans* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

§3. G-fonctions.

Définition 3.1. *Soit* $\left(a_{\underline{\alpha}}\right)_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ *une famille de nombres algébriques. On considère les conditions suivantes :*
(G_1*) pour tout* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ *il existe une constante réelle positive* C_1 *telle que les conjugués des* $a_{\underline{\alpha}}$ *sont de module inférieur à* $C_1^{|\underline{\alpha}|}$*;*
(G_2*) il existe une constante réelle positive* C_2 *telle que le dénominateur commun dans* $\mathbb{N}$ *de* $\left\{a_{\underline{\alpha}} : |\underline{\alpha}| \leq n\right\}$ *est inférieur à* C_2^{n+1}.

Soient $P \in X$ *un point fermé de* X *et* $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ *le complété de l'anneau local* $\mathcal{O}_{X,P}$ *de* X *en* P*. Le choix des coordonnées étales* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ *sur* X *détermine une immersion de* K*-algèbres différentielles*

$$\begin{array}{rcl} \tau \ : \hat{\mathcal{O}}_{X,P} & \hookrightarrow & L[\![\underline{x} - \underline{x}(P)]\!] \\ f & \longmapsto & \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\underline{\alpha}!}\frac{\partial^{\underline{\alpha}} f}{\partial \underline{x}^{\underline{\alpha}}}(P)\,(\underline{x} - \underline{x}(P))^{\underline{\alpha}} \end{array}, \tag{3.1.1}$$

où L *est une extension finie de* K*. On appelle* G*-fonction en* P *un élément* f *de* $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$*, qui satisfait les conditions suivantes :*
(G) les coefficients des $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}(\underline{x} - \underline{x}(P))^{\underline{\alpha}}$ *vérifient les conditions* G_1*) et* G_2*);*
(H) f *est rationnellement holonome, i.e. le* $\mathcal{F}$*-espace vectoriel engendré par* $(\underline{D}^{\underline{\alpha}} f)_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ *est un* $\mathcal{F}/K$*-module différentiel de dimension finie.*

Remarque 3.2.
1) La notion de G-fonction est indépendante du choix des coordonnées étales et du corps K, d'ailleurs, quitte à étendre le corps K, on va supposer que P est un point K-rationnel et que $\underline{x}(P) = 0$.
2) Un élément f de $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ est rationnellement holonome si et seulement si la série $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ est rationnellement holonome sur $K(\underline{x})$, *i.e.* le $K(\underline{x})/K$-module différentiel engendré par $(\underline{D}^{\underline{\alpha}}\tau(f))_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$ est un $K(\underline{x})$-espace vectoriel de dimension finie.

On veut maintenant caractériser la propriété (G) de façon plus quantitative; pour cela on va introduire la notion de taille d'une série formelle :

Définition 3.3. *Pour une série formelle* $y = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]$*, on définit la taille de* y *de la façon suivante :*

$$\sigma(y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} h(y, n, v)$$

où

$$h(y,n,v) = \sup_{|\underline{\alpha}|\leq n} \left(\log^+ |a_{\underline{\alpha}}|_v\right) \ .$$

Proposition 3.4. *Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ et $\tau(f) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]$; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) f a la propriété (G);
2) $\sigma(\tau(f)) < +\infty$.

La démonstration de la dernière proposition dans le cas d'une variable (*cf.* [7, VIII, 1.1]) se généralise sans difficulté à l'énoncé qu'on vient de donner.

Remarque 3.5. Il est évident que le lien entre les G-fonctions et les modules différentiels de type G est très profond. En effet, considérons un X/K-module différentiel $(\mathcal{M},\nabla)$ de type G. Soit $\underline{e}$ une base fixée de $\mathcal{M}$ sur X; on pose :

$$\nabla(D_i)\underline{e} = \underline{e}G_i \ , \text{ pour tout } i = 1,\dots,d.$$

On peut vérifier facilement que, si ξ est un point fermé de X, au voisinage de ξ on a :

$$D_i \left(\sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} G_{\underline{\alpha}}(\xi)(\underline{x}-\underline{x}(\xi))^{\underline{\alpha}} \right) = \left(\sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} G_{\underline{\alpha}}(\xi)(\underline{x}-\underline{x}(\xi))^{\underline{\alpha}} \right) G_i \ , \text{ pour tout } i = 1,\dots,d.$$

On en déduit que les composantes des vecteurs horizontaux de ∇ sur la base $\underline{e}$ (et donc sur toute base de $\mathcal{M}$) sont des G-fonctions.

Le théorème fondamental de ce papier, que nous allons énoncer dans la prochaine section, montre, en particulier, que le module différentiel engendré par une G-fonction est de type G.

§4. Enoncé du théorème principal.

Théorème 4.1. *Soient X un K-schéma lisse connexe de dimension relative d, tel que $\kappa(X) = \mathcal{F}$, $P \in X$ un point fermé et (M,∇) un $\mathcal{F}/K$-module différentiel. On considère le corps $Frac(\hat{\mathcal{O}}_{X,P})$; puisque $\mathcal{O}_{X,P} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$, $Frac(\hat{\mathcal{O}}_{X,P})$ a une structure naturelle de $\mathcal{F}/K$-module différentiel. Supposons que (M,∇) a une solution injective (i.e. un morphisme injectif de modules à connexion)*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\nabla}\left(M, Frac\left(\hat{\mathcal{O}}_{X,P}\right)\right)$$

et qu'il existe une base $\underline{f} = (f_1,\dots,f_\mu)$ de M sur $\mathcal{F}$ ayant les propriétés :
i) $\varphi(f_i) \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$,
ii) $\varphi(f_i)$ a la propriété (G) pour tout $i = 1,\dots,\mu$;
alors (M,∇) est un module différentiel de type G.

L'énoncé qui suit est équivalent au théorème (4.1) :

Théorème 4.2. *Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ une G-fonction et soit (M,∇) le $\mathcal{F}/K$-module différentiel engendré par $(\underline{D}^{\underline{\alpha}} f)_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}$; alors (M,∇) est un module différentiel de type G.*

En combinant (2.5) et (4.1), on obtient le corollaire :

Corollaire 4.3. *Sous les hypothèses du théorème (4.1), le module différentiel (M,∇) est à singularités régulières et les exposants en chaque singularité sont rationnels.*

La démonstration du théorème (4.1) fera l'objet de la section suivante.

§5. Démonstration du théorème (4.1).

La démonstration de (4.1) est divisée en plusieurs étapes :
I. Réduction au cas d'un ouvert de l'espace affine.
II. Idée de la démonstration.
III. Une propriété des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.
IV. Inversibilité de la matrice $R^{<0>}$.
V. Construction des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.
VI. Première partie des estimations.
VII. Conclusion de la démonstration.

I. Réduction au cas d'un ouvert affine.

Quitte à restreindre X à un voisinage ouvert de P, il existe des coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ sur X telles que le morphisme associé à $\underline{x}$

$$g : X \longrightarrow g(X) \subset \mathbb{A}^d_K$$

est en effet un morphisme étale. Si on étend le corps de base K, on peut supposer que P est un point K-rationnel et que $\underline{x}(P) = 0$. Alors, on a un isomorphisme d'algèbres différentielles associé à g :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)} = K[\![\underline{x}]\!] \tag{5.0.1}$$

qui nous permet de regarder φ comme une solution injective de (M, ∇) en tant que $K(\underline{x})/K$-module différentiel :

$$\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_\nabla \left(M, Frac\left(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)}\right)\right) \ .$$

On veut montrer qu'il existe une base de M sur $K(\underline{x})$ telle que $\widetilde{\varphi}$ vérifie les hypothèses *i)* et *ii)* du théorème. Soit $i : \mathrm{Spec}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K(\underline{x}))$ le morphisme associé à l'injection $K(\underline{x}) \hookrightarrow \mathcal{F}$; étant donné que $\mathcal{F}$, muni de la connexion triviale, est un module différentiel de type G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{F})$, $i_*\mathcal{F}$ est un module différentiel de type G sur $\mathrm{Spec}(K(\underline{x}))$ (*cf.* [5, App. A]). L'injection

$$\mathcal{O}_{X,P} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^d_K, g(P)} = K[\![\underline{x}]\!] \ ,$$

obtenue de (5.0.1) par restriction, nous donne donc une solution injective de $\mathcal{F}$ muni de la connexion triviale. Il s'ensuit qu'il existe une base $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_\nu)$ de $\mathcal{F}$ sur K telle que les éléments de $\underline{u}$ satisfont les hypothèses *i)* et *ii)* de (4.1) (il suffit, en effet, de choisir u_i dans $\mathcal{O}_{X,P}$). Soit $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_\mu)$ une base de M sur $\mathcal{F}$ satisfaisant les mêmes hypothèses. On peut alors conclure que la base $(u_i f_j)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \mu}$ de M sur $K(\underline{x})$ satisfait aux hypothèses *i)* et *ii)* du théorème (4.1).

Supposons que l'on ait démontré le théorème (4.1) pour un sous-schéma ouvert de l'espace affine : alors (M, ∇) est un G-module en tant que $K(\underline{x})/K$-module différentiel, autrement dit il existe un diviseur Z de $g(X)$ de dimension pure 1 tel qu'il existe un module à connexion intégrable $(\mathcal{M}, \nabla)$ de type G sur $g(X) \smallsetminus Z$. Puisque g est génériquement fini il existe un ouvert dense U de X tel que la restriction $g_{|U} : U \longrightarrow g(U)$ est un revêtement étale. On peut supposer que $g(U) \subset g(X) \smallsetminus Z$. Alors $(g^*_{|U}\mathcal{M}_{|g(U)}, g^*_{|U}\nabla_{|g(U)})$, est un module différentiel de type G sur U (*cf.* [5, App. A]), dont la fibre générique est (M, ∇).

On en déduit qu'il suffit de démontrer le théorème (4.1) dans le cas d'un sous-schéma ouvert $X \subset \mathbb{A}^d_K$.

II. Idée de la démonstration.

5.1. Supposons alors que X est un sous-schéma ouvert de $\mathbb{A}^d_K$. On peut supposer que P est un point K-rationnel et qu'il existe des coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ sur X telles que $\underline{x}(P) = 0$. Etant donnée une base $\underline{f}$ de M sur $K(x)$ on pose :

$$\frac{1}{\underline{\alpha}!}\nabla\left(\underline{D}\right)^{\underline{\alpha}}\underline{f} = \underline{f}G_{\underline{\alpha}}\ ,\ \text{avec } G_{\underline{\alpha}} \in M_{\mu\times\mu}\left(K(x)\right).$$

On rappelle que les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ satisfont à la relation :

$$G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \frac{1}{\alpha_i+1}\left(G_{\underline{1}_i}G_{\underline{\alpha}} + D_iG_{\underline{\alpha}}\right)\ ,\ \forall\ \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d.$$

Par hypothèse on peut choisir $\underline{f}$ de façon que $(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_\mu)) = (y_0, \ldots, y_{\mu-1}) \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ a les propriétés suivantes :
- $D_i(y_0, \ldots, y_{\mu-1}) = (y_0, \ldots, y_{\mu-1})G_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$;
- $y_0, \ldots, y_{\mu-1}$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$;
- $\sigma(y_i) < \infty$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu-1$.

On a donc :

$$\frac{D^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{\mu-1}\end{pmatrix} = {}^tG_{\underline{\alpha}}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{\mu-1}\end{pmatrix}\ ,\ \text{pour tout } \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d,$$

où ${}^tG_{\underline{\alpha}}$ est la matrice transposée de $G_{\underline{\alpha}}$.

Notations 5.2. Pour simplifier les notations, on écrira $G_{\underline{\alpha}}$ au lieu de ${}^tG_{\underline{\alpha}}$; alors le vecteur $\overrightarrow{y} = {}^t\left(y_0, \ldots, y_{\mu-1}\right)$ est solution de

$$\frac{D^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\overrightarrow{y} = G_{\underline{\alpha}}\overrightarrow{y}\ ,\ \text{pour tout } \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d,$$

et les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ vérifient la relation :

$$G_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \frac{1}{\alpha_i+1}\left(G_{\underline{\alpha}}G_{\underline{1}_i} + D_iG_{\underline{\alpha}}\right)\ ,\ \forall\ \underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d.$$

On note Λ_i, $i = 1, \ldots, d$, l'opérateur matriciel suivant :

$$\Lambda_i = D_i - G_{\underline{1}_i}(\underline{x})\ .$$

On remarque que les opérateurs $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$ commutent entre eux deux à deux et que si $\mathcal{Y}$ est une matrice inversible à coefficients dans une extension différentielle $\mathcal{G}$ de $K(\underline{x})$ telle que $\Lambda_i(\mathcal{Y}) = 0$, on a :

$$\Lambda_i = \mathcal{Y}\circ D_i\circ\mathcal{Y}^{-1}\ ,\ \forall\ i = 1, \ldots, d\ .$$

Etant donné $\overrightarrow{P}\in K[\underline{x}]^\mu$, on définit :

$$\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \frac{\Lambda^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\overrightarrow{P} = \prod_{i=1}^{d}\frac{\Lambda_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}\overrightarrow{P} = \mathcal{Y}\frac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left(\mathcal{Y}^{-1}\overrightarrow{P}\right)\ .$$

Lemme 5.3.

(5.3.1) $$G_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}}\frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\circ\Lambda^{\underline{\beta}}\ ,$$

$$G_{\underline{\alpha}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}} = \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})} \binom{\underline{\gamma}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} R_{\underline{\gamma}+\underline{\beta}} \ , \ \textit{pour tout } \underline{\alpha},\underline{\gamma}\in\mathbb{N}^d. \tag{5.3.2}$$

Démonstration. On démontre d'abord la formule (5.3.1). On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\circ\Lambda^{\underline{\beta}} &= \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\circ\mathcal{Y}\circ\underline{D}^{\underline{\beta}}\circ\mathcal{Y}^{-1} \\
&= \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \left(\sum_{\underline{\gamma}\leq\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} \underline{D}^{\underline{\gamma}}\mathcal{Y}\right) \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}-\underline{\gamma}}\circ\underline{D}^{\underline{\beta}}\circ\mathcal{Y}^{-1} \\
&= \sum_{\substack{\underline{\gamma}\leq\underline{\alpha}\\ \underline{\beta}\leq\underline{\alpha}-\underline{\gamma}}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} (\underline{D}^{\underline{\gamma}}\mathcal{Y})\circ\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\gamma}}\circ\mathcal{Y}^{-1} \ .
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}-\underline{\gamma}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}{\underline{\gamma}} = \frac{1}{\underline{\gamma}!(\underline{\alpha}-\underline{\gamma})!}\sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}-\underline{\gamma}} (-1)^{|\underline{\beta}|}\binom{\underline{\alpha}-\underline{\gamma}}{\underline{\beta}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{\alpha}!} & \text{si } \underline{\alpha}=\underline{\gamma} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc :

$$\sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\circ\Lambda^{\underline{\beta}} = \frac{1}{\underline{\alpha}!}(\underline{D}^{\underline{\alpha}}\mathcal{Y})\circ\mathcal{Y}^{-1} = G_{\underline{\alpha}}\mathcal{Y}\mathcal{Y}^{-1} = G_{\underline{\alpha}} \ .$$

On démontre maintenant la formule (5.3.2). Pour tout $\underline{\gamma}\in\mathbb{N}^d$ on a :

$$\begin{aligned}
G_{\underline{\alpha}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}} &= \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{\underline{\alpha}!}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\Lambda^{\underline{\beta}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}} \\
&= \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})}\binom{\underline{\gamma}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}+\underline{\beta}} \ .
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.4. Pour démontrer que (M,∇) est un module différentiel de type G, on doit estimer les matrices $G_{\underline{\alpha}}$. Pour cela on développera la démonstration dans deux directions :
1) d'un coté on va établir une relation entre $\overrightarrow{R}_{\underline{\beta}}$ et $\overrightarrow{P}$ qui nous permettra d'estimer la valeur de ces vecteurs;
2) de l'autre coté on va démontrer que, sous des hypothèses convenables sur $\overrightarrow{P}$, il existe $\underline{\gamma}_0,\dots,\underline{\gamma}_{\mu-1}\in\mathbb{N}^d$ tels que la matrice $R^{<0>} = \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0},\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1},\dots,\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$ est inversible, car, d'après le dernier lemme, les matrices $G_{\underline{\alpha}}$ vérifient la formule :

$$G_{\underline{\alpha}}R^{<0>} = \sum_{\underline{\beta}\leq\underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!}\underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})}R^{<\underline{\beta}>} \ , \tag{5.4.1}$$

où :

$$R^{<\underline{\beta}>} = \left(\binom{\underline{\gamma}_0+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_0}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0+\underline{\beta}}, \binom{\underline{\gamma}_1+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_1}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1+\underline{\beta}},\dots,\binom{\underline{\gamma}_{\mu-1}+\underline{\beta}}{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}+\underline{\beta}}\right) \ .$$

III. Une propriété des approximants de Hermite-Padé de $\overrightarrow{y}$.

Notations 5.5. Etant donné un polynôme

$$p(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} p_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]$$

on pose :

$$\deg_{\underline{x}} p(\underline{x}) = \max\{|\underline{\alpha}| : \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d \text{ et } p_{\underline{\alpha}} \neq 0\} \ .$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{P} = {}^t(P_0, \ldots, P_{\mu-1}) \in K[\underline{x}]^\mu$ on utilisera la notation :

$$\deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} = \sup_{i=0,\ldots,\mu-1} \deg_{\underline{x}} P_i \ .$$

Pour $\sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \overrightarrow{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ on pose :

$$\left(\sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \overrightarrow{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}\right)_{\leq N} = \sum_{|\underline{\alpha}|\leq N} \overrightarrow{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \overrightarrow{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}\right)_{> N} = \sum_{|\underline{\alpha}|> N} \overrightarrow{a}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \ .$$

Soit $((x_1, \ldots, x_d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration de $K[\underline{x}]$ associée à l'idéal $(x_1, \ldots, x_d)$. On appelle $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ord}_{\underline{x}} \ : K[\underline{x}] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ p(\underline{x}) & \longmapsto & \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ p(\underline{x}) \in (x_1, \ldots, x_d)^n\} \quad . \\ 0 & \longmapsto & \infty \end{array}$$

Evidemment la fonction $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ satisfait les axiomes de valuation :

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_{\underline{x}} \left(p_1(\underline{x}) p_2(\underline{x})\right) = \mathrm{ord}_{\underline{x}} p_1(\underline{x}) + \mathrm{ord}_{\underline{x}} p_2(\underline{x}) \\ \mathrm{ord}_{\underline{x}} \left(p_1(\underline{x}) + p_2(\underline{x})\right) \geq \min\left(\mathrm{ord}_{\underline{x}} p_1(\underline{x}), \mathrm{ord}_{\underline{x}} p_2(\underline{x})\right) \end{cases} , \forall p_1(x), p_2(x) \in K[\underline{x}]$$

et donc on peut étendre $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ à $K(\underline{x})$ en posant :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} = \mathrm{ord}_{\underline{x}} p(\underline{x}) - \mathrm{ord}_{\underline{x}} q(\underline{x}) \ .$$

On peut aussi étendre $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ au complété $(x_1, \ldots, x_d)$-adique $K[\![\underline{x}]\!]$ de $K[\underline{x}]$. Les plongements naturels de $K(\underline{x})$ et de $K[\![\underline{x}]\!]$ dans le corps des fractions $Frac\,(K[\![\underline{x}]\!])$ sont compatibles avec la définition de $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$. De plus, pour un vecteur $\overrightarrow{P} = {}^t(P_0, \ldots, P_{\mu-1})$ on pose :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \overrightarrow{P} = \inf_{i=0,\ldots,\mu-1} \mathrm{ord}_{\underline{x}} P_i \ .$$

Dans la suite on utilisera la propriété de $\mathrm{ord}_{\underline{x}}$ suivante :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \left(D_i p(\underline{x})\right) \geq \mathrm{ord}_{\underline{x}} p(\underline{x}) - 1 \ , \ \forall \ i = 1, \ldots, d.$$

Proposition 5.6. *Soient $Q \in \mathcal{V}_K[\underline{x}] \setminus \{0\}$, tel que $Q(\underline{x})G_{\underline{1}_i}(\underline{x}) \in M_{\mu\times\mu}(K[\underline{x}])$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, et*

$$t = 1 + \sup_{i=1,\ldots,d} \left(\deg_{\underline{x}}\left(Q(\underline{x})G_{\underline{1}_i}(\underline{x})\right), \deg_{\underline{x}} Q(\underline{x}) - 1\right) .$$

Soient $N \in \mathbb{N}$ et κ un nombre réel positif. On se donne un polynôme $q \in K[\underline{x}]$ tel que

$$\deg_{\underline{x}} q \leq N \tag{5.6.1}$$

et

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}}\, (q\overrightarrow{y})_{>N} \geq 1 + N + \kappa N . \tag{5.6.2}$$

On pose $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N}$. Alors, pour N assez grand, pour $\overrightarrow{P} \neq 0$ et pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ tel que :

$$|\underline{\alpha}| < \frac{N}{t}\kappa ,$$

on a :

$$Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)\overrightarrow{y}\right)_{\leq N+|\underline{\alpha}|(t-1)} . \tag{5.6.3}$$

Démonstration. On remarque d'abord que, pour N assez grand, $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N} = q\overrightarrow{y} - (q\overrightarrow{y})_{>N} \neq 0$; en effet si, par l'absurde, $\overrightarrow{P} = 0$, alors $q\overrightarrow{y} = (q\overrightarrow{y})_{>N}$ et donc :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} q\overrightarrow{y} \geq 1 + N + \kappa N .$$

Comme $\deg_{\underline{x}} q \leq N$, on en déduit que :

$$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \overrightarrow{y} \geq \kappa N ;$$

on obtient une contradiction, car $\overrightarrow{y}$ ne dépend pas de N.

Pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} = \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)\overrightarrow{y} - Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} .$$

On a l'égalité :

$$(\alpha_i + 1)\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} = \left(QD_i - |\underline{\alpha}|D_iQ - QG_{\underline{1}_i}\right)\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} ,$$

puisque :

$$\begin{aligned}
QD_i\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} &= Q\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i}q\right)\overrightarrow{y} + \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{y} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}(D_iQ)\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)\overrightarrow{y}\right)\\
&\quad - Q\left(Q^{|\underline{\alpha}|}D_i\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}(D_iQ)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)\\
&= Q\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i}q\right)\overrightarrow{y} + \frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!}\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{y} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}(D_iQ)\left(\underline{D}^{\underline{\alpha}}q\right)\overrightarrow{y}\right)\\
&\quad - Q\left(Q^{|\underline{\alpha}|}(\alpha_i+1)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} + Q^{|\underline{\alpha}|}G_{\underline{1}_i}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|\frac{Q^{|\underline{\alpha}|-1}}{\underline{\alpha}!}(D_iQ)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)\\
&= (\alpha_i+1)\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} + QG_{\underline{1}_i}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} + |\underline{\alpha}|(D_iQ)\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} ,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}} &\geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_{\underline{\alpha}-\underline{1}_i} - 1 \geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}\overrightarrow{L}_0 - |\underline{\alpha}| \\ &\geq \mathrm{ord}_{\underline{x}}(q\overrightarrow{y} - (q\overrightarrow{y})_{\leq N}) - |\underline{\alpha}| \geq 1 + N + \kappa N - |\underline{\alpha}| \\ &> 1 + N + |\underline{\alpha}|(t-1)\ .\end{aligned}$$

On obtient le résultat cherché grâce au lemme suivant :

Lemme 5.7. *Soient Q et t comme dans la proposition précédente. Alors, pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, on a :*

$$Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]^{\mu}$$

et :

$$\deg_{\underline{x}}\left(Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right) \leq \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{P} + |\underline{\alpha}|(t-1)\ .$$

Démonstration. On pose $\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} = Q^{|\underline{\alpha}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$. Par hypothèse on a $\overrightarrow{H}_{\underline{0}} = \overrightarrow{R}_{\underline{0}} = \overrightarrow{P} \in K[\underline{x}]^{\mu}$. On conclut en raisonnant par récurrence car :

$$\begin{aligned}(\alpha_i+1)\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} &= \Lambda_i\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = \left(D_i - G_{\underline{1}_i}\right)\frac{\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}}}{Q^{|\underline{\alpha}|}} \\ &= \frac{(D_i\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}})Q - |\underline{\alpha}|\,(D_iQ)\,\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} - QG_{\underline{1}_i}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}}}{Q^{|\underline{\alpha}|+1}}\ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\deg_{\underline{x}}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}} \leq \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{H}_{\underline{\alpha}-\underline{1}_i} + (t-1) \leq \deg_{\underline{x}}\overrightarrow{P} + |\underline{\alpha}|(t-1)\ .$$

■

IV. Inversibilité de la matrice $R^{<0>}$.

L'objet de cette section est le développement du deuxième point de (5.4). On remarque que dans le cas d'un module différentiel irréductible l'existence d'une matrice inversible de la forme $R^{<0>}$ ne nécessite pas d'hypothèse sur le vecteur $\overrightarrow{P}$ et elle se vérifie de façon élémentaire[4].

Théorème 5.8. *Soit $\overrightarrow{y}(\underline{x}) = (y_0(\underline{x}),\dots,y_{\mu-1}(\underline{x}))^t \in K[\![\underline{x}]\!]^{\mu}$ un vecteur solution de $\Lambda_i Y = 0$, pour tout $i = 1,\dots,d$, tel que $y_0(\underline{x}),\dots,y_{\mu-1}(\underline{x})$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$.*

---

[4] Soient $\mathcal{Z}\in Gl(\mu,\mathcal{G})$ une matrice inversible à coefficients dans une extension différentielle $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, telle que :

$$D_i\mathcal{Z}+{}^tG_i\mathcal{Z}=0\ ,\ \text{pour tout } i=1,\dots,d,$$

et $\vec{P}={}^t(P_0,\dots,P_{\mu-1})\in K[\underline{x}]^{\mu}$. Alors la matrice ${}^t\mathcal{Z}^{-1}$ est telle que $(D_i-G_i)\left({}^t\mathcal{Z}^{-1}\right)=0$, pour tout $i=1,\dots,d$, et :

$$\vec{R}_{\underline{\alpha}}={}^t\mathcal{Z}^{-1}\tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left({}^t\mathcal{Z}\vec{P}\right)$$

On veut montrer que, si le module différentiel (M,∇) est irréductible, la matrice $(\vec{R}_{\underline{\alpha}})_{|\underline{\alpha}|\leq\mu-1}$ a rang maximal μ pour tout $\vec{P}\in K[\underline{x}]^{\mu}$. En effet, s'il existe $\vec{P}$ tel que la matrice $(\vec{R}_{\underline{\alpha}})_{|\underline{\alpha}|\leq\mu-1}$ n'a pas rang maximal, il en est de même de la matrice wronskienne

$${}^t\vec{R}_{\underline{\alpha}}\mathcal{Z}=\tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\left({}^t\vec{P}\mathcal{Z}\right)\ .$$

Alors les entrées du vecteur ${}^t\vec{P}\mathcal{Z}\in\mathcal{G}^{\mu}$ sont linéairement dépendantes sur les corps des constantes C de $\mathcal{G}$ (*cf.* Appendice B) : il existe donc un vecteur de solutions $\vec{z}$ du systeme $(D_i+{}^tG_i)_{i=1,\dots,d}$ à coefficients dans $\mathcal{G}$ tel que ${}^t\vec{P}\vec{z}=0$. On en déduit que le module différentiel dual de (M,∇) (et donc (M,∇)) est réductible (*cf.* [6, VIII, 2.6]).

Il existe une constante $C(\Lambda)$, ne dépendant que de Λ_i, $i = 1, \ldots, d$, telle que si

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_{\mu-1} \end{pmatrix} \in K[\underline{x}]^\mu \setminus \{\underline{0}\}$$

a la propriété suivante :

(5.8.1) $$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} P_i & P_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \geq \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P}(\underline{x}) + C(\Lambda) \ , \forall i, j = 0, \ldots, \mu - 1,$$

alors la matrice $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1}$ a rang maximal μ.

Remarque 5.9. On observe que, si on choisit q et $\overrightarrow{P}$ comme dans (5.6), pour N assez grand, on a :

$$\kappa N \geq C(\Lambda)$$

et donc la condition (5.8.1) est satisfaite, car :

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} P_i & P_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} = \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} (qy_i)_{>N} & (qy_j)_{>N} \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \geq 1 + N + \kappa N \ .$$

Pour terminer la démonstration de (4.1) il suffit, alors, de déterminer un polynôme q convenable et d'estimer les matrices $G_{\underline{\alpha}}$.

On a d'abord besoin d'une définition :

Définition 5.10. *On appelle degré total de $\frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} \in K(\underline{x})$ l'entier positif ou nul :*

$$\deg \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})} = \deg_{\underline{x}} p(\underline{x}) + \deg_{\underline{x}} q(\underline{x}) \ .$$

Le lemme suivant est une version dans le cas de plusieurs variables d'un lemme de Schidlovsky :

Lemme 5.11. *Soit $\mathcal{G}/K(\underline{x})$ une extension de corps et soit $V \subset \mathcal{G}$ un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors le degré total des éléments de $K(\underline{x})$ qu'on peut écrire comme quotient de deux éléments de V est borné.*

Démonstration. Soit $\widetilde{V}$ le $K(\underline{x})$-espace vectoriel engendré par V. On considère une K-base $(\eta_1, \ldots, \eta_t)$ de V, telle que $(\eta_1, \ldots, \eta_l)$, pour $l \leq t$, est une $K(\underline{x})$-base de $\widetilde{V}$. Alors il existe $A_{l+j,i} \in K(\underline{x})$, pour $j = 1, \ldots, t - l$ et $i = 1, \ldots, l$, tels que :

(5.11.1) $$\eta_{l+j} = \sum_{i=1}^{l} A_{l+j,i} \eta_i \ , \ \forall \ j = 1, \ldots, t - l.$$

Soit $h \in K(\underline{x})$ tel que $h = \xi/\eta$, avec $\xi, \eta \in V$ et $\eta \neq 0$. On a :

$$\xi = h\eta = h \sum_{i=1}^{t} v_i \eta_i = \sum_{i=1}^{t} w_i \eta_i \ ,$$

pour des $v_i, w_i \in K$ convenables. Grâce à (5.11.1), pour tout $i = 1, \dots, l$, on obtient :

$$h\left(v_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} v_{l+j}\right) = w_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} w_{l+j} \ .$$

Comme on a supposé $\eta \neq 0$, il existe $i = 1, \dots, l$ tel que $v_i + \sum_{j=1}^{t-l} A_{l+j,i} v_{l+j} \neq 0$; on en déduit que le degré total de h est borné, pour tout $h \in K(\underline{x})$ que l'on peut écrire comme quotient de deux éléments de V, par une constante dépendant seulement des $A_{l+j,i}$. ■

Démonstration du théorème (5.8). Soit $\mathcal{G}$ une extension différentielle de $K(\underline{x})$, telle qu'il existe une matrice $\mathcal{Z} \in Gl(\mu, \mathcal{G})$ solution de $D_i\mathcal{Z} + {}^tG_i\mathcal{Z} = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$, et soit C le corps des constantes de $\mathcal{G}$ par rapport aux dérivations $(D_1, \dots, D_d)$. On remarque que ${}^t\mathcal{Z}^{-1}$ est une solution du système différentiel $\Lambda_i Y = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$.

On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{G}^\mu & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & \begin{pmatrix} T_0 \\ \vdots \\ T_{\mu-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i-0}^{\mu-1} P_i T_i \ . \end{array}$$

La matrice de Φ dans la base de $\mathcal{G}^\mu$ associée à la matrice $\mathcal{Z}$ est donnée par

$$\underline{w} = (w_0, \dots, w_{\mu-1}) = {}^t\overrightarrow{P}\mathcal{Z}$$

et par définition de $\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$ on a :

$$(5.11.2) \qquad {}^t\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \mathcal{Z} = \left(\tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\underline{w}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \ .$$

Etant donné que la matrice de droite est, à multiplication par une matrice diagonale près, une matrice wronskienne, la matrice $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1}$ n'a pas rang maximal μ si et seulement si $w_0, \dots, w_{\mu-1}$ sont linéairement dépendants sur C (*cf.* Appendice B); de plus on a :

$$\nu = \text{rang } \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} = \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} C w_i \ .$$

Soit $(\widetilde{w}_0, \dots, \widetilde{w}_{\nu-1})$ une base de $\sum_{i=0}^{\mu-1} C w_i$ telle que

$$(\, w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{\mu-1}\,)\, M = (\, \widetilde{w}_0 \quad \widetilde{w}_1 \quad \dots \quad \widetilde{w}_{\nu-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0\,) \ , \text{ avec } M \in Gl(\mu, C).$$

La matrice $\mathcal{Z}M$ est encore une solution de l'operateur différentiel $D_i + {}^tG_i$ et, donc, on peut utiliser $\mathcal{Z}M$ au lieu de $\mathcal{Z}$ dans (5.11.2). Pour simplifier les notations on écrira $\mathcal{Z}$ pour $\mathcal{Z}M$; on obtient :

$${}^t\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \mathcal{Z} = \left(\, \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_0 \quad \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_1 \quad \dots \quad \tfrac{1}{\underline{\alpha}!}\underline{D}^{\underline{\alpha}}\widetilde{w}_{\nu-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0\,\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \ .$$

Soit $R^{<0>} = \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0}, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1}, \dots, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$ une sous-matrice carrée de $\left(\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1}$. On introduit les notations suivantes :

$$R^{<0>} = \begin{pmatrix} R_{IJ} & R_{IJ'} \\ R_{I'J} & R_{I'J'} \end{pmatrix} \text{ et } {}^t\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{JS} & \mathcal{Z}_{JS'} \\ \mathcal{Z}_{J'S} & \mathcal{Z}_{J'S'} \end{pmatrix} \ ,$$

où $I = J = S = \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ et $I' = J' = S' = \{\nu, \dots, \mu - 1\}$. Quitte à changer l'ordre de $\underline{\gamma}_0, \dots, \underline{\gamma}_{\mu-1}$ et de $P_0, \dots, P_{\mu-1}$, on peut supposer que la matrice R_{IJ} a rang maximal. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{JS} & \mathcal{Z}_{JS'} \\ \mathcal{Z}_{J'S} & \mathcal{Z}_{J'S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{IJ} & R_{IJ'} \\ R_{I'J} & R_{I'J'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

avec A matrice $\nu \times \mu$, et donc :

$$\mathcal{Z}_{J'S} R_{IJ} + \mathcal{Z}_{J'S'} R_{I'J} = 0 .$$

Soit $B = R_{I'J} R_{IJ}^{-1}$. Comme $R^{<0>} \in M_{\mu \times \mu}(K(\underline{x}))$, $B \in M_{\mu-\nu,\nu}(K(\underline{x}))$. Puisque $R^{<0>}$ ne change pas si on remplace $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{Z}M$, il en est de même de B. Etant donné que $\mathcal{Z}$ est une matrice inversible et que

$$(\, \mathcal{Z}_{J'S} \quad \mathcal{Z}_{J'S'} \,) = \mathcal{Z}_{J'S'} \,(\, -B \quad I_{\mu-\nu} \,) ,$$

la matrice $\mathcal{Z}_{J'S'}$ est inversible et on obtient :

$$B = -\mathcal{Z}_{J'S'}^{-1} \mathcal{Z}_{J'S} .$$

Les coefficients de la matrice B peuvent s'écrire sous la forme ξ/η, où ξ et η sont des éléments du K-espace vectoriel des polynômes de degré au plus $\mu - \nu$ à coefficients dans K en les entrées de la matrice $\mathcal{Z}$. D'après le lemme précédent, le degré total des éléments de la matrice B est borné par une constante ne dépendant que de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_d)$, puisque M est une matrice à coefficients dans le corps des constantes C.

On considère maintenant les deux matrices :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} y_{\mu-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \in M_{\nu \times \nu}(K[\![\underline{x}]\!])$$

et

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -y_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{\nu \times \mu-\nu}(K[\![\underline{x}]\!])$$

et on pose :

$$T = (\, Q_1 \quad Q_2 \,) \begin{pmatrix} R_{IJ} \\ R_{I'J} \end{pmatrix} = (\, Q_1 \quad Q_2 \,) \begin{pmatrix} \mathbb{I}_\nu \\ B \end{pmatrix} R_{IJ} .$$

Soit $(b_0, \dots, b_{\nu-1})$ la dernière ligne de B. On a :

$$\begin{aligned}
\det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) &= \det\left(Q_1 + Q_2 B\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} y_{\mu-1} - y_0 b_0 & -y_0 b_1 & -y_0 b_2 & \cdots & -y_0 b_{\nu-1} \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} y_{\mu-1} - y_0 b_0 - y_1 b_1 - \cdots - y_{\nu-1} b_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & -y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & -y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu-1} & 0 & 0 & \cdots & -y_0 \end{pmatrix} \\
&= (-y_0)^{\nu-1}\left(y_{\mu-1} - y_0 b_0 - y_1 b_1 - \cdots - y_{\nu-1} b_{\nu-1}\right) \ .
\end{aligned}$$

On remarque que $\det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) \neq 0$, car par hypothèse $y_0, \dots, y_{\mu-1}$ sont linéairement indépendants sur $K(\underline{x})$. On va trouver une contradiction en déterminant des bornes inférieure et supérieure de $\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\left(TR_{IJ}^{-1}\right)$.

Etant donné que le degré total des éléments de la matrice B est borné par une constante ne dépendant que de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$, on obtient l'existence d'une constante C_1, dépendant du système différentiel et indépendant de $\overrightarrow{P}$, telle que

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det\left(TR_{IJ}^{-1}\right) \leq C_1 \ .$$

Maintenant, on va chercher une borne inférieure. Soient

$$\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} = {}^t\left(R_{\underline{\alpha},0}, R_{\underline{\alpha},2}, \dots, R_{\underline{\alpha},\mu-1}\right) \ , \ \text{pour tout } \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d,$$

de façon que :

$$R^{<0>} = \left(R_{\underline{\gamma}_i,j}\right)_{i,j\in\{0,1,\dots,\mu-1\}^2} \ ,$$

et :

$$G_{\underline{1}_h} = \left(G_{i,j}^h\right)_{i,j\in\{0,1,\dots,\mu-1\}^2} \ .$$

Les éléments de la première ligne de T sont de la forme

$$\det\begin{pmatrix} y_{\mu-1} & R_{\underline{\gamma}_s,\mu-1} \\ y_0 & R_{\underline{\gamma}_s,0} \end{pmatrix} \ , \ \text{pour } s = 0, \dots, \nu-1,$$

et ceux de la i-ième ligne, pour $i = 1, \dots, \nu-1$:

$$\det\begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\gamma}_s,i} \\ y_0 & R_{\underline{\gamma}_s,0} \end{pmatrix} \ , \ \text{pour } s = 0, \dots, \nu-1.$$

D'après les relations de récurrence qui lient les vecteurs $\overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}}$ on obtient :

$$D_h \det \begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha},i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha},j} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_l G^h_{i,l} y_l & R_{\underline{\alpha},i} \\ \sum_l G^h_{j,l} y_l & R_{\underline{\alpha},j} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_i & D_h R_{\underline{\alpha},i} \\ y_j & D_h R_{\underline{\alpha},j} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sum_l G^h_{i,l} y_l & R_{\underline{\alpha},i} \\ \sum_l G^h_{j,l} y_l & R_{\underline{\alpha},j} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_i & \sum_l G^h_{i,l} R_{\underline{\alpha},l} \\ y_j & \sum_l G^h_{j,l} R_{\underline{\alpha},l} \end{pmatrix} + (\alpha_h + 1) \det \begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_l G^h_{i,l} \det \begin{pmatrix} y_l & R_{\underline{\alpha},l} \\ y_j & R_{\underline{\alpha},j} \end{pmatrix} + \sum_l G^h_{j,l} \det \begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha},i} \\ y_l & R_{\underline{\alpha},l} \end{pmatrix} + (\alpha_h + 1) \det \begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j} \end{pmatrix} ,$$

d'où, par récurrence sur $|\underline{\alpha}|$, on déduit que :

$$\inf_{i,j=0,\dots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} y_i & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,i} \\ y_j & R_{\underline{\alpha}+\underline{1}_h,j} \end{pmatrix}$$
$$\geq (|\underline{\alpha}| + 1) \inf_{h=1,\dots,d} (-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \inf_{i,j=0,\dots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j \end{pmatrix}$$

et enfin que :

$$\operatorname{ord}_{\underline{x}} \det T \geq \left(\sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i| \right) \inf_{h=1,\dots,d} (-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \nu \inf_{i,j=0,\dots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j \end{pmatrix} .$$

D'après (5.7), on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det R_{I,J} &\leq \deg_{\underline{x}} (\text{numérateur de } \det R_{I,J}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\nu-1} \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{H}_{\underline{\gamma}_i} \\ &\leq \nu \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} + (t-1) \sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i| \\ &\leq \nu \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} + (t-1)\nu(\mu - 1) . \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \left(T R^{-1}_{I,J} \right) &\geq \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det (T) - \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det (R_{I,J}) \\ &\geq \left(\sum_{i=0}^{\nu-1} |\underline{\gamma}_i| \right) \inf_{h=1,\dots,d} (-1, \operatorname{ord}_{\underline{x}} G_{\underline{1}_h}) + \nu \Bigg(\inf_{i,j=0,\dots,\mu-1} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j \end{pmatrix} \\ &\qquad - \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} - (t-1)(\mu - 1) \Bigg) \\ &\geq \nu \left(\inf_{i,j} \operatorname{ord}_{\underline{x}} \det \begin{pmatrix} y_i & P_i \\ y_j & P_j \end{pmatrix} - \deg_{\underline{x}} \overrightarrow{P} \right) + C_2 , \end{aligned}$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$. Alors il suffit de choisir une constante $C(\Lambda)$ assez grande pour obtenir une contradiction. ■

V. Construction des approximants de Hermite-Padé de $\vec{y}$.

Notations 5.12. Pour $q = \sum_{\underline{\alpha}} q_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\underline{x}]$ on pose :

$$h(q,v) = \sup_{\underline{\alpha}} \log^+ |q_{\underline{\alpha}}|_v \ , \ \forall\, v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$$

et

$$h(q) = \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} h(q,v) \ .$$

Pour $\vec{y} = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \vec{y}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in K[\![\underline{x}]\!]^\mu$ on pose :

$$\widetilde{h}(n,v) = \sup_{|\underline{\alpha}| \le n} \log^+ |\vec{y}_{\underline{\alpha}}|_v \ , \ \forall\, v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty \ ,$$

où $|\vec{y}_{\underline{\alpha}}|_v$ est le maximum des valeurs absolues v-adiques des entrées de $\vec{y}_{\underline{\alpha}}$.

On a la proposition suivante :

Proposition 5.13. *Pour $\tau \in (0,1)$ fixé, pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand et pour toute constante*

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu} + 1 \right)^{1/d} - 1 \ ,$$

il existe $q \in K[\underline{x}]$ tel qu'on ait :

(5.13.1) $$\deg_{\underline{x}} q \le N \ ,$$

(5.13.2) $$\mathrm{ord}_{\underline{x}} \, (q\vec{y})_{>N} \ge 1 + N + \kappa N$$

et

(5.13.3) $$h(q) \le const + \frac{1-\tau}{\tau} \left(d \log N + \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N + \kappa N, v) \right) \ ,$$

De plus, si on pose $\vec{P} = (q\vec{y})_{\le N} = q\vec{y} - (q\vec{y})_{>N}$, alors, pour N assez grand, $\vec{P}$ est non nul et (5.8.1) est vérifiée.

Démonstration. On cherche $q \in K[\underline{x}]$ tel que les conditions (5.13.1) et (5.13.2) sont vérifiées. Soient

$$q = \sum_{|\underline{\alpha}| \le N} q_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \text{ et } \vec{y} = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \vec{y}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \ ;$$

alors

$$q\vec{y} = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d} \left(\sum_{\substack{\underline{\beta} + \underline{\gamma} = \underline{\alpha} \\ |\underline{\beta}| \le N}} q_{\underline{\beta}} \vec{y}_{\underline{\gamma}} \right) \underline{x}^{\underline{\alpha}} \ .$$

La condition (5.13.2) se traduit par le système linéaire suivant :

(5.13.4) $$\left\{ \sum_{\substack{\underline{\beta} + \underline{\gamma} = \underline{\alpha} \\ |\underline{\beta}| \le N}} q_{\underline{\beta}} \vec{y}_{\underline{\gamma}} = 0 \ , \text{pour tout } |\underline{\alpha}| = N+1, \dots, N + \kappa N. \right.$$

On va vérifier que, pour N assez grand, (5.13.4) admet une solution non-triviale. On note I le nombre d'inconnues et E le nombre d'équations. En appliquant la formule :

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r-1} + \ldots + \binom{r-1}{r-1} \ , \ \forall\, n \geq r-1 \geq 0 \ ,$$

on a :

$$\begin{aligned} E &= \mu \left(\sum_{k=0}^{N+\kappa N} \binom{d-1+k}{d-1} - \sum_{k=0}^{N} \binom{d-1+k}{d-1} \right) \\ &= \mu \left(\binom{d+N+\kappa N}{d} - \binom{d+N}{d} \right) \\ &= \mu \frac{(1+\kappa)^d - 1}{d!} N^d + (\text{termes de degré inférieur en } N) \ , \end{aligned}$$

et :

$$I = \sum_{k=0}^{N} \binom{d-1+k}{d-1} = \binom{N+d}{d} = \frac{N^d}{d!} + (\text{termes de degré inférieur en } N) \ .$$

Le système a une solution non-triviale si la condition $I > E$ est vérifiée, donc, pour N assez grand, si on a :

$$\mu \frac{(1+\kappa)^d - 1}{d!} < \frac{1-\tau}{d!} \ ,$$

ou de façon équivalente :

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu} + 1 \right)^{1/d} - 1 \ .$$

D'après le lemme de Siegel on peut trouver une solution non nulle de (5.13.4) telle que :

$$h(q) \leq const + \frac{E}{I-E} \left(\log(const) + \log I + \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N+\kappa N, v) \right) \ .$$

Pour $N >> 0$:

$$\frac{E}{I-E} \leq \frac{1-\tau}{\tau} \ .$$

En résumant, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} h(q) &\leq const + \frac{1-\tau}{\tau} \left(\log(const) + \log I + \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N+\kappa N, v) \right) \\ &\leq const + \frac{1-\tau}{\tau} \left(d \log N + \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N+\kappa N, v) \right) \ , \end{aligned}$$

où la constante dépend de τ et de d.

La dernière affirmation de (5.13) est démontrée dans (5.9). ■

VI. Première partie des estimations.

Notations 5.14. Pour tout $v \in \Sigma_f$ et tout $\dfrac{\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}} b_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}} \in K(\underline{x})$, on définie la norme suivante :

$$\left| \frac{\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}}{\sum_{\underline{\beta}} b_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}} \right|_{v,Gauss} = \frac{\sup_{\underline{\alpha}} |a_{\underline{\alpha}}|_v}{\sup_{\underline{\beta}} |b_{\underline{\beta}}|_v} \ .$$

On rappelle qu'on a supposé par hypothèse que

$$\sigma(\overrightarrow{y}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}(n,v)\right) < +\infty$$

et qu'on veut démontrer que

$$\sigma(M) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f} h(M,n,v)\right) < \infty \ ,$$

avec :

$$h(M,n,v) = \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d \\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|G_{\underline{\alpha}}\right|_{v,Gauss} \ .$$

On va introduire les notations :

$$y = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d} \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \ , \ \text{avec } \overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}} \in K^\mu,$$

$$\sigma_f(\overrightarrow{y}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f} \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d \\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}\right|_v\right) \ ,$$

$$\sigma_\infty(\overrightarrow{y}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_\infty} \sup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d \\ |\underline{\alpha}|\leq n}} \log^+ \left|\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}\right|_v\right) \ .$$

Dans la suite on notera q un polynôme construit selon la proposition (5.13). On remarque que, pour un tel choix de q et pour $\overrightarrow{P} = (q\overrightarrow{y})_{\leq N}$, la formule (5.4.1) est vraie et les hypothèses de (5.6) et (5.8) sont vérifiées.

Proposition 5.15. *Dans les notations introduites on a :*

$$\sigma(M) \leq \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\kappa} + (t-1)\right) + \Omega \ ,$$

où κ est une constante positive telle que :

$$\kappa < \left(\frac{1-\tau}{\mu} + 1\right)^{1/d} - 1$$

et

$$\Omega = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu\sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|Q(\underline{x})^{\sum_{i=0}^{\mu-1}|\underline{\gamma}_i|}\Delta(\underline{x})\right|_{X,v}^{-1}\right) \ ,$$

avec $\underline{\gamma}_0, \ldots, \underline{\gamma}_{\mu-1} \in \mathbb{N}^d$, tels que $|\underline{\gamma}_i| \leq \mu - 1$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu-1$.

Démonstration. On fixe $N, n >> 0$ tels que :

(5.15.1) $$N > \frac{t}{\kappa}(n+\mu-1) > \frac{t}{\kappa}n \ .$$

D'après (5.6), pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{\alpha}| \leq n+\mu-1$, on a :

$$\left(\frac{Q^{|\underline{\alpha}|}}{\underline{\alpha}!} (D^{\underline{\alpha}} q) \overrightarrow{y} \right)_{\leq N+|\underline{\alpha}|(t-1)} = \overrightarrow{R}_{\underline{\alpha}} Q^{|\underline{\alpha}|} \ . \tag{5.15.2}$$

De plus, d'après le choix fait pour $\overrightarrow{P}$, il existe une matrice inversible

$$R^{<0>} = \left(\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0}, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1}, \dots, \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}} \right), \text{ avec } |\underline{\gamma}_0|, |\underline{\gamma}_1|, \dots, |\underline{\gamma}_{\mu-1}| \leq \mu - 1,$$

qui vérifie la formule (5.4.1) :

$$G_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}} \frac{(-1)^{|\underline{\beta}|}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \underline{D}^{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})} R^{<\underline{\beta}>} \left(R^{<0>} \right)^{-1} \ .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left| G_{\underline{\alpha}} \right|_{v,Gauss} &\leq \left(\sup_{\substack{\underline{\beta} \leq \underline{\alpha} \\ i=0,\dots,\mu-1}} \left| \frac{\underline{D}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}}{(\underline{\alpha}-\underline{\beta})!} \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i+\underline{\beta}} \right|_{v,Gauss} \right) \left| \operatorname{adj} R^{<0>} \right|_{v,Gauss} \left| \det R^{<0>} \right|^{-1}_{v,Gauss} \\ &\leq \left(\sup_{\underline{\beta} \leq |\underline{\alpha}|+\mu-1} \left| \overrightarrow{R}_{\underline{\beta}} \right|_{v,Gauss} \right) \left| \operatorname{adj} R^{<0>} \right|_{v,Gauss} |\Delta|^{-1}_{v,Gauss} \ , \end{aligned}$$

où on a posé $\Delta(\underline{x}) = \det R^{<0>}(\underline{x})$.

Etant donné notre choix de N et n et (5.15.2), pour tout $|\underline{\beta}| \leq n+\mu-1$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{R}_{\underline{\beta}} \right|_{v,Gauss} &\leq |Q|^{-|\underline{\beta}|}_{v,Gauss} |Q|^{|\underline{\beta}|}_{v,Gauss} |q|_{v,Gauss} \left| (\overrightarrow{y})_{\leq N+|\underline{\beta}|(t-1)} \right|_{v,Gauss} \\ &\leq |q|_{v,Gauss} \left| (\overrightarrow{y})_{\leq N+|\underline{\beta}|(t-1)} \right|_{v,Gauss} \ , \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sup_{|\underline{\alpha}| \leq n} \log^+ \left| G_{\underline{\alpha}} \right|_{v,Gauss} &\leq \widetilde{h}\left(N + (n+\mu-1)(t-1), v \right) \\ &\quad + (\mu-1)\widetilde{h}\left(N + (\mu-1)(t-1), v \right) + \mu h(q,v) + \log |\Delta|^{-1}_{v,Gauss} \ . \end{aligned}$$

Par définition de Q, on a $|Q|_{v,Gauss} \leq 1$ et, d'après (5.7), $Q^{|\underline{\beta}|} \overrightarrow{R}_{\underline{\beta}} \in K[\underline{x}]^{\mu}$. Si on pose :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\underline{x}) &= Q^{|\underline{\gamma}_0|} \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0} \wedge Q^{|\underline{\gamma}_1|} \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1} \wedge \cdots \wedge Q^{|\underline{\gamma}_{\mu-1}|} \overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}} \\ &= Q^{\sum_{i=0}^{\mu-1} |\underline{\gamma}_i|} (\underline{x}) \Delta(\underline{x}) \ , \end{aligned}$$

on obtient $\left| \overline{\Delta}(\underline{x}) \right|_{v,Gauss} \leq |\Delta(\underline{x})|_{v,Gauss}$, avec $\overline{\Delta}(\underline{x}) \in K[\underline{x}]$, et donc :

$$\begin{aligned} \sup_{|\underline{\alpha}| \leq n} \log^+ \left| G_{\underline{\alpha}} \right|_{v,Gauss} &\leq \widetilde{h}\left(N + (n+\mu-1)(t-1), v \right) + \\ &\quad (\mu-1)\widetilde{h}\left(N + (\mu-1)(t-1), v \right) + \mu h(q,v) + \log \left| \overline{\Delta} \right|^{-1}_{v,Gauss} \ . \end{aligned}$$

Etant donnée la condition (5.15.1), on fixe un nombre entier positif k et une suite $\varepsilon_n \in (0,1)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} k > \dfrac{t(\mu-1)}{\kappa} \\ \dfrac{N}{n} = \dfrac{t}{\kappa} + \dfrac{k-\varepsilon_n}{n} \end{array}\right. . \tag{5.15.3}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in\Sigma_f} \sup_{|\underline{\alpha}|\le n} \log^+ \left|G_{\underline{\alpha}}(\underline{x})\right|_{v,Gauss}\right) \\
&\le \sigma_f(\overrightarrow{y}) \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{N+(n+\mu-1)(t-1)}{n} + (\mu-1)\frac{N+(\mu-1)(t-1)}{n}\right) + \Omega \\
&\le \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{t}{\kappa} + (t-1) + (\mu-1)\frac{t}{\kappa}\right) + \Omega \\
&\le \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\kappa} + (t-1)\right) + \Omega\ ,
\end{aligned}$$

où

$$\Omega = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|^{-1}_{v,Gauss}\right) .$$

■

VII. Conclusion de la démonstration.

On a le lemme suivant :

Lemme 5.16.

$$\Omega \le \sigma_\infty(\overrightarrow{y})\,\frac{\mu t}{\kappa} + \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n} h(q) .$$

Démonstration. Soient $\underline{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_d)$ des racines de l'unité telles que :

$$\overline{\Delta}(\underline{\xi}) \neq 0 \neq Q(\underline{\xi}) .$$

Etant donné que $|\overline{\Delta}(\underline{\xi})|_v \le |\overline{\Delta}(\underline{x})|_{v,Gauss}$ pour tout $v\in\Sigma_f$, par la Formule du Produit on a :

$$\sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|^{-1}_{v,Gauss} \le \sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|^{-1}_{v} \le \sum_{v\in\Sigma_\infty} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_{v} .$$

On rappelle que

$$\overline{\Delta}(\underline{x}) = \det\left(Q^{|\underline{\gamma}_0|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_0} \quad Q^{|\underline{\gamma}_1|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_1} \quad \cdots \quad Q^{|\underline{\gamma}_{\mu-1}|}\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_{\mu-1}}\right)$$

et que pour tout $n\le\mu-1$, d'après le choix fait pour n, la formule (5.6.3) est valable. De plus on a :

$$\begin{aligned}
\frac{Q^{|\underline{\gamma}_i|}}{\underline{\gamma}_i!}\left(D^{\underline{\gamma}_i} q\right)\overrightarrow{y} &= \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}\left(\sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}=\underline{\alpha}} (Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}}\left(\frac{D^{\underline{\gamma}_i}}{\underline{\gamma}_i!}q\right)_{\underline{\gamma}}\overrightarrow{y}_{\underline{\delta}}\right)\underline{x}^{\underline{\alpha}} \\
&= \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^d}\left(\sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}=\underline{\alpha}} (Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}}\binom{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i} q_{\underline{\gamma}_i+\underline{\gamma}}\overrightarrow{y}_{\underline{\delta}}\right)\underline{x}^{\underline{\alpha}} ,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la notation suivante :

pour tout $P \in K[\![\underline{x}]\!]$ et pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, $P_{\underline{\alpha}}$ est le coefficient de $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ dans P.

On en déduit que $Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\underline{\xi})$ est une somme de termes de la forme :

$$(Q^{|\underline{\gamma}_i|})_{\underline{\beta}} \binom{\underline{\gamma}_i + \underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i} q_{\underline{\gamma}_i + \underline{\gamma}} \overrightarrow{y}_{\underline{\delta}} \underline{\xi}^{\underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\delta}} ,$$

avec :

$$\begin{aligned} &|\underline{\gamma}_i| \leq \mu - 1 \ \forall\ i = 1, \dots, d, \\ &|\underline{\beta}| \leq \deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1} , \\ &|\underline{\gamma}| \leq N \ , \ |\underline{\gamma} + \underline{\gamma}_i| \leq N , \\ &|\underline{\delta}| \leq N + (\mu-1)(t-1) . \end{aligned}$$

Pour tout $v \in \Sigma_\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left| Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\underline{\xi}) \right|_v \leq & \binom{\deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1} + d}{d} \binom{N+d}{d} \binom{N + (\mu-1)(t-1) + d}{d} \\ & \cdot \sup(1, c_1)^{\mu-1} \left(\sup_{\substack{\underline{\gamma} \geq \underline{\gamma}_i \\ |\underline{\gamma}| \leq N}} \binom{\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i} \right) \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N + (\mu-1)(t-1)} |\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v \right) \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N} |q_{\underline{\alpha}}|_v \right) , \end{aligned}$$

avec :

$$c_1 = \sup_{|\underline{\beta}| \leq \deg_{\underline{x}} Q} |(Q)_{\underline{\beta}}|_v .$$

On remarque que, pour N assez grand, il existe deux constantes c_2 et c_3 telles que :

$$\sup_{\substack{\underline{\gamma} \geq \underline{\gamma}_i \\ |\underline{\gamma}| \leq N}} \binom{\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_i} \leq \binom{N}{\mu-1}^d \leq c_2 N^{d(\mu-1)}$$

et

$$\binom{\deg_{\underline{x}} Q^{\mu-1} + d}{d} \binom{N+d}{d} \binom{N + (\mu-1)(t-1) + d}{d} \leq c_3 N^{2d} .$$

Si on pose :

$$c_v = c_2 c_3 \sup(1, c_1)^{\mu-1} ,$$

on obtient l'estimation suivante :

$$\left| Q^{|\underline{\gamma}_i|}(\underline{\xi})\overrightarrow{R}_{\underline{\gamma}_i}(\underline{\xi}) \right|_v \leq c_v N^{d(\mu+1)} \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N + (\mu-1)(t-1)} |\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v \right) \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N} |q_{\underline{\alpha}}|_v \right) .$$

On a enfin :

$$\left| \overline{\Delta}(\underline{\xi}) \right|_v \leq \mu! c_v^\mu N^{d\mu(\mu+1)} \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N + (\mu-1)(t-1)} |\overrightarrow{y}_{\underline{\alpha}}|_v \right)^\mu \left(\sup_{|\underline{\alpha}| \leq N} |q_{\underline{\alpha}}|_v \right)^\mu$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \Sigma_\infty} \log \left| \overline{\Delta}(\underline{\xi}) \right|_v \leq & \; const + d\mu(\mu+1)(\#\Sigma_\infty) \log N + \\ & \mu \sum_{v \in \Sigma_\infty} h(q, v) + \mu \sum_{v \in \Sigma_\infty} \widetilde{h}\,(N + (\mu-1)(t-1), v) . \end{aligned}$$

On rappelle que, d'après (5.15.3), on a les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N}{n} = \frac{t}{\kappa}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log N}{n} = 0 \ ,$$

d'où on peut conclure, car :

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_f} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{x})\right|^{-1}_{v,Gauss}\right)\\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + \sum_{v\in\Sigma_\infty} \log\left|\overline{\Delta}(\underline{\xi})\right|_{v}\right)\\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\mu \sum_{v\in\Sigma_f} h(q,v) + const + d\mu(\mu+1)(\#\Sigma_\infty)\log N + \mu \sum_{v\in\Sigma_\infty} h(q,v)\right.\\
&\qquad\qquad \left. +\mu \sum_{v\in\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)\right)\\
&\qquad \le \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{\mu}{n} \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} h(q,v) + \frac{\mu}{n}\sum_{v\in\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+(\mu-1)(t-1),v\right)\right)\\
&\qquad \le \frac{\mu}{n} h(q) + \frac{\mu t}{\kappa}\sigma_\infty(\overrightarrow{y}) \ .
\end{aligned}$$

■

5.17. Conclusion de la démonstration de (4.1). D'après (5.13.3), on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n} h(q) &\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n}\left(const + \frac{1-\tau}{\tau}\left(d\log N + \sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+\kappa N,v\right)\right)\right)\\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1-\tau}{\tau}\left(d\mu\frac{\log N}{n} + \frac{\mu}{n}\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} \widetilde{h}\left(N+\kappa N,v\right)\right)\\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu\sigma\left(\overrightarrow{y}\right) \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(N+\kappa N\right)\\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu\sigma\left(\overrightarrow{y}\right)\left(\frac{t}{\kappa}+t\right)\\
&\le \frac{1-\tau}{\tau}\mu t\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\sigma\left(\overrightarrow{y}\right) \ ,
\end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\sigma\left(M\right) &\le \sigma_f(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\kappa} + (t-1)\right) + \sigma_\infty\left(\overrightarrow{y}\right)\frac{\mu t}{\kappa} + \sigma\left(\overrightarrow{y}\right)\frac{1-\tau}{\tau}\mu t\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\\
&\le \sigma(\overrightarrow{y})\left(\frac{\mu t}{\tau}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) - \mu t + (t-1)\right) \ .
\end{aligned}$$

La constante $1+\frac{1}{\kappa}$ est minimale pour κ maximal, donc on choisit

$$\kappa = \left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d} - 1 \ .$$

Ainsi la constante dans la dernière estimation dépend de la fonction de $\tau \in (0,1)$ suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) &= \frac{1}{\tau}\frac{\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d}}{\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{1/d}-1} = \frac{\mu}{\tau(1-\tau)}\sum_{i=1,\dots,d}\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right)^{i/d} \\ &\le \frac{d\mu}{\tau(1-\tau)}\left(\frac{1-\tau}{\mu}+1\right) = d\mu\left(\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau}\right) \ .\end{aligned}$$

La fonction $\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau}$ a un minimum pour

$$\tau = \left(1+\sqrt{\frac{\mu}{\mu+1}}\right)^{-1} \ ;$$

pour cette valeur de τ on obtient :

$$\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{1-\tau} = \left(1+\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}}\right)^2 \le \begin{cases} 4.95 & \text{pour } \mu \ge 2 \\ 5.9 & \text{pour } \mu = 1 \end{cases} \ .$$

Enfin on a :

$$\sigma(M) \le \begin{cases} \sigma(\overrightarrow{y})\left(4.95d\mu^2 t - \mu t + (t-1)\right) & \text{pour } \mu \ge 2 \\ \\ \sigma(\overrightarrow{y})\,(5.9dt-1)) & \text{pour } \mu = 1 \end{cases} \ .$$

Appendice A. Régularité des modules différentiels de type G.

Définition A.1. *Dans les notations introduites dans (2.2), on dit que (M,∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$, avec $v|p$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est verifiée :*
1) il existe un entier positif n tel que, pour tout $\underline{\omega} \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\underline{\omega}| = n$, $|G_{p\underline{\omega}}|_{X,v} < 1$;
2) $R_v(\mathcal{M}) > |p|_v^{1/(p-1)}$.

On dit que (M,∇) est nilpotent presque partout si l'ensemble des $p \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, tels qu'il existe $v|p$ pour lequel (M,∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$, est de densité de Dirichlet 1.

Remarque A.2. Soit (M,∇) un $\mathcal{F}/K$-module différentiel de type G. On sait ([6] et [5, 4.1]) que les conditions de Bombieri et de Galočkin sont équivalentes; il s'ensuit que l'ensemble $T = \{p \in \mathbb{Z} |\ \exists v|p\ R_{X,v}(\mathcal{M}) \le |p|_v^{1/(p-1)}\}$ a densité de Dirichlet 1, car :

$$\infty > \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \log\frac{1}{R_{X,v}(\mathcal{M})} \ge \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \log|p|_v^{-1/(p-1)} = \sum_{\substack{p\in T\\ v|p}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]}\frac{\log p}{p-1} = \sum_{p\in T}\frac{\log p}{p-1} \ .$$

On en déduit que les modules différentiels de type G sont nilpotents presque partout.

On a la généralisation suivante du théorème de Katz [8, 13.0], [7, III, Remark 6.3] :

Théorème A.3. *Soit (M, ∇) un $\mathcal{F}/K$-module différentiel :*
i) Si (M, ∇) a reduction nilpotente modulo $v \in \Sigma_S$ pour un ensemble infini de $v \in \Sigma_S$, alors les singularités de (M, ∇) sont régulières.
ii) Si (M, ∇) est nilpotent presque partout, les exposants (M, ∇) en chaque diviseur sont dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe un diviseur Z de X de codimension pure 1 et un module à connexion integrable $(\mathcal{M}, \nabla)$ sur $X \smallsetminus Z$, tel que (M, ∇) est la fibre de $(\mathcal{M}, \nabla)$ au point générique de X. Soit L une extension finie de K; par changement de base on obtient un module différentiel $(\mathcal{M}_L, \nabla)$ défini sur $X_L \smallsetminus Z_L$. Si (M, ∇) satisfait aux hypothèses de *i)* et *ii)* il en est de même de la fibre au point générique $(M \otimes_K L, \nabla)$ de $(\mathcal{M}_L, \nabla)$. De plus, (M, ∇) a une singularité régulière en Z si et seulement si $(M \otimes_K L, \nabla)$ a une singularité régulière en Z_L.

Soit $\imath : C \hookrightarrow X_L$ une courbe lisse sur L, telle que $C \cap Z_L = P$. Le module différentiel $(\imath^* \mathcal{M}_L, \imath^* \nabla)$ satisfait aux hypothèses de *i)* et *ii)* sur la courbe C : d'après [8, 13.0] et [7, III, Remark 6.3] la fibre au point générique de $(\imath^* \mathcal{M}_L, \imath^* \nabla)$ est singulière régulière en P et ses exposants sont dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Puisque cela est vrai pour toute extension L et toute courbe C de X_L, on peut conclure grâce à [3, Th. 5.7 et 6.4.3]. ■

Appendice B. Lemme du Wronskien à plusieurs variables.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif intègre muni des dérivations $D_1, \ldots, D_d$. On suppose que l'anneau C des constantes de $\mathcal{A}$ par rapport à $D_1, \ldots, D_d$:

$$C = \{c \in \mathcal{A} \ : \ D_i(c) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, d\}$$

est un corps.

La proposition qu'on va énoncer est une généralisation à plusieurs variables du lemme du Wronskien :

Proposition B.1. *Soient $u_0, \ldots, u_{\mu-1}$ des éléments de $\mathcal{A}$; la dimension de l'espace vectoriel engendré sur C par $u_0, \ldots, u_{\mu-1}$ est égale au rang de la matrice :*

$$W_d(u_0, \ldots, u_{\mu-1}) = \left(\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0 \quad \cdots \quad \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{\mu-1} \right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} .$$

Démonstration. Soit $r = \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} C u_i$. On peut supposer que $u_0, \ldots, u_{r-1}$ est une base de $\sum_{i=0}^{\mu-1} C u_i$; étant donné que $u_r, \ldots, u_{\mu-1}$ et leurs dérivées peuvent être écrits comme combinaison linéaire à coefficients dans C de $u_1, \ldots, u_{r-1}$, on obtient :

$$\text{rang} W_d(u_0, \ldots, u_{\mu-1}) \leq \dim_C \sum_{i=0}^{\mu-1} C u_i \ .$$

Démontrons l'inégalité inverse. Quitte à changer l'ordre des $u_0, \ldots, u_{\mu-1}$, on peut supposer que :

$$r = \text{rang} W_d(u_0, \ldots, u_{\mu-1}) = \text{rang} \left(\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0 \quad \cdots \quad \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1} \right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} .$$

Il suffit de montrer que u_r peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans C de $u_0, \ldots, u_{r-1}$. Sous les hypothèses faites, il existe un vecteur ${}^t(a_0, \ldots, a_{r-1}) \in \mathcal{A}^r$ tel que :

$$\text{(B.1.1)} \qquad (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_r)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \ .$$

Pour tout $i = 1, \ldots, d$ on a :

$$
\begin{aligned}
&(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} \\
&+ (\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} \begin{pmatrix} D_i a_0 \\ \vdots \\ D_i a_{r-1} \end{pmatrix} = \left(\underline{D}^{\underline{\alpha}+\underline{1}_i} u_r\right)_{|\underline{\alpha}| \leq \mu-1} .
\end{aligned}
\tag{B.1.2}
$$

Si on considère la sous-matrice de (B.1.2) obtenue en retirant les lignes indexées par les $\underline{\alpha}$ tels que $|\underline{\alpha}| = \mu - 1$, on déduit de (B.1.1) que :

$$
(\underline{D}^{\underline{\alpha}} u_0, \ldots, \underline{D}^{\underline{\alpha}} u_{r-1})_{|\underline{\alpha}| < \mu-1} \begin{pmatrix} D_i a_0 \\ \vdots \\ D_i a_{r-1} \end{pmatrix} = 0
$$

et donc ${}^t(D_i a_0, \ldots, D_i a_{r-1}) = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, d$. ■

Références

[1] André Y. : "*G-functions and Geometry*", Aspects of Mathematics E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[2] André Y., Baldassarri F. : "Geometric theory of G-functions", in *Arithmetic Geometry*, F. Catanese Ed., Symp. Math. XXXVII, Cambridge Univ. Press, 1997.

[3] André Y., Baldassarri F. : "*De Rham Cohomology of Differential Modules on Algebraic Varieties*", Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 184, Septembre 1998.

[4] Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. : "Application of Padé approximation to diophantine inequalities in value of G-functions", Lect.Notes in Math. 1052, Springer-Verlag, 1985, 1-51.

[5] Di Vizio L. : "On arithmetic size of linear differential equations", manuscrit.

[6] Dwork B. : "On the size of differential modules", Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 225–239.

[7] Dwork B., Gerotto G., Sullivan F. : "*An Introduction to G-functions*", Annals of Mathematical Studies 133, Princeton University Press, Princeton N.J., 1994.

[8] Katz N. M. : "Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin", Publ. Math. IHES 39 (1970), 175-232.