COURBURES, GROUPES DE GALOIS GÉNÉRIQUES ET D-GROUPOÏDE DE GALOIS D'UN SYSTÈME AUX q-DIFFÉRENCES

LUCIA DI VIZIO AND CHARLOTTE HARDOUIN

Résumé. En combinant les résultats de [6], [1] and [2], nous prouvons que les groupes de Galois génériques, usuel et différentiel, d'un module aux q-différences sur $\mathbb{C}(x)$ peuvent toujours être caractérisés à l'aide d'un ensemble convenable de courbures, dans l'esprit de [8]. Nous utilisons ce résultat pour prouver que le D-groupoïde de Malgrange-Granier d'un système aux q-différences linéaire coïncide, dans un sens que nous spécifions dans le texte ci-dessous, avec un espece de clôture de Kolchin de la dynamique du système aux q-différences, et que le groupe qui fixe une transversal du groupoïde coïncide avec le groupe de Galois différentiel générique.

Introduction

Considérons un système aux q-différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$. Dans [5], les auteurs attachent à cet objet un groupe de Galois différentiel à la Kolchin-Cassidy, qui "mesure" les relations algébrodifférentielles satisfaites par les solutions du système. Le groupe différentiel de Hardouin-Singer est défini sur la clôture différentielle du corps des fonctions méromorphes sur le tore $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, donc un corps très grand.

Nous considérons ici le groupe de Galois générique d'un système aux q-différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$, dans l'esprit de [8] et [1], et son avatar différentiel. Ces deux groupes génériques sont définis sur $\mathbb{C}(x)$ et encodent beaucoup d'informations sur les solutions du système et peuvent être caractérisés en termes de courbures, dans l'esprit de la conjecture de Grothendieck-Katz sur les p-courbures d'une équation différentielle (*cf.* [8]). Nous comparons le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire (*cf.* [4]) avec le groupe de Galois générique différentiel et la clôture de Kolchin de la dynamique du système, généralisant ainsi les résultats de [3].

1. Définition des groupes de Galois génériques algébrique et différentiel

Soient K un corps de caractéristique zéro, $q \in K \smallsetminus \{0, 1\}$ et $\sigma_q : f(x) \mapsto f(qx)$, pour tout $f(x) \in K(x)$. On appelle module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ sur $K(x)$ un $K(x)$-espace vectoriel $M_{K(x)}$ équipé d'une bijection σ_q-semilinéaire $\Sigma_q : M_{K(x)} \to M_{K(x)}$. Nous considérons la plus petite famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ de $K(x)$-espaces vectoriels contenant $M_{K(x)}$ et fermée par rapport aux constructions algébriques (somme directe, produit tensoriel, symétrique et antisymétrique, dual). L'opérateur Σ_q induit une bijection σ_q-semilinéaire sur chaque espace vectoriel de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$, que l'on appellera à nouveau Σ_q, de façon que les éléments de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ ont une structure de module aux q-différences sur $K(x)$. Notons que $Gl(M_{K(x)})$ agit fonctoriellement sur chaque élément de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$.

Nous pouvons aussi considérer une famille plus grande $Constr^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$, contenant $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$, mais qui est en plus fermée par rapport au *foncteur de prolongation* F, dont nous allons maintenant donner la définition. Soit $\partial = x\frac{d}{dx}$. Pour tout module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)}$, le module aux q-différences $F(\mathcal{M}_{K(x)}) = (F(M_{K(x)}), \Sigma_q)$ est défini par : $F(M_{K(x)}) = M_{K(x)} \otimes_{K(x)} [K(x) + K(x)\partial]$, où le produit tensoriel est pris par rapport à la structure de $K(x)$-module à droite de $K(x) + K(x)\partial$; si $\underline{e}$ est une $K(x)$-base de $M_{K(x)}$ telle que $\Sigma_q\underline{e} = \underline{e}A(x)$, alors on note $(\underline{e}, \partial(\underline{e})) := (\underline{e} \otimes 1, \underline{e} \otimes \partial)$ et on pose $\Sigma_q(\underline{e}, \partial(\underline{e})) = (\underline{e}, \partial\underline{e}) \begin{pmatrix} A & \partial(A) \\ 0 & A \end{pmatrix}$, motivé par le fait que $\sigma_q\partial = \partial\sigma_q$. Nous soulignons que la structure $K(x)$-linéaire de $F(M_{K(x)})$ est définie par

Date: 31 mars 2010

Lucia DI VIZIO, Institut de Mathématiques de Jussieu, Topologie et géométrie algébriques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. e-mail: `divizio@math.jussieu.fr`.
Charlotte HARDOUIN, Institut de Mathématiques de Toulouse 118 route de Narbonne F-31062 Toulouse Cedex 9, France. e-mail: `hardouin@math.ups-tlse.fr`.
Travail partiellement financé par le contrat ANR-06-JCJC-0028.

$\lambda(\partial(m)(:= \lambda(m\otimes\partial)) = \partial(\lambda m) - \partial(\lambda)m$, pour tout $\lambda \in K(x)$ et $m \in M_{K(x)}$. Un automorphisme $\varphi \in Gl(M_{K(x)})$ agit sur $F(M_{K(x)})$ dans la base $(\underline{e}, \partial\underline{e})$ via : $\varphi(\underline{e}, \partial(\underline{e})) = (\underline{e}, \partial\underline{e})\begin{pmatrix}\Phi & \partial(\Phi)\\ 0 & \Phi\end{pmatrix}$.

Définition 1.1. *On appelle* groupe de Galois générique (algébrique) (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ *le sous-groupe algébrique* $Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)}) : \varphi$ *stabilise tout sous-espace* Σ_q*-stable dans chaque objet de* $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})\}$ *(resp. différentiel*[1] $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)}) : \varphi$ *stabilise tout sous-espace* Σ_q*-stable dans chaque objet de* $Constr^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})\}$*) de* $Gl(M_{K(x)})$.

La noetherianité de $Gl(M_{K(x)})$ et le théorème de Ritt-Raudenbush [7, Thm.7.1] impliquent :

Proposition 1.2. *Il existe un sous-corps $K' \subset K$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que*

$$Gal(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) \quad \left(\text{resp. } Gal^\partial(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})\right).$$

D'après le théorème de Chevalley (resp. son analogue différentiel [10]) tout sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ s'écrit comme le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ contenue dans $\mathcal{W}_{K(x)}$ dans $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Constr^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$).

2. Conjecture de Grothendieck-Katz pour les modules aux q-différences

Nous pouvons donner l'énoncé informel suivant, dont nous expliquerons la significations plus loin :

Théorème 2.1. *Soient K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini, $q \in K \smallsetminus \{0,1\}$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q-différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient un ensemble non vide et cofini de courbures.*

L'énoncé précédent résume de façon un peu informelle trois énoncés similaires. Les trois cas dépendent de la nature de q :

1) q est une racine de l'unité. Dans ce cas, il n'y a qu'une courbure à prendre en compte :

Théorème 2.2 (*cf.* [6] dans le cas du groupe de Galois usuel)**.** *Soient K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini, q une racine de l'unité d'ordre $\kappa > 1$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q-différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$) est la clôture de Zariski (resp. la clôture de Kolchin) de $\{\Sigma_q^\kappa\}$ dans $Gl(M_{K(x)})$.*

2) q est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Si q est transcendant sur $\mathbb{Q}$, il existe un corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$ tel que q est transcendant sur k et K est une extension algébrique de $k(q)$. Nous appellons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers de K. Nous appellerons *cyclotomiques* les valuations v de K, pour lesquelles l'image de q dans le corps résiduel est une racine de l'unité q_v, disons d'ordre κ_v. Soit ϕ_v le polynôme minimal de q_v sur k. Dans ce cadre, le théorème 2.1 se traduit par :

Théorème 2.3 ([2, Thm. 4.5 and 5.11])**.** *Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϕ_v, pour presque toute place cyclotomique v.*

Cet énoncé nécessite encore des explications. Notons qu'il existe une algèbre $\mathcal{A}$, munie d'une action de σ_q, de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_K\left[x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \dots\right]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, et un $\mathcal{A}$-réseau M de $M_{K(x)}$ stable par Σ_q. Le $\mathcal{A}$-réseau M induit un $\mathcal{A}$-réseau V sur tout module aux q-différences $\mathcal{V}_{K(x)}$ contenu dans une construction différentielle de $\mathcal{M}_{K(x)}$. Alors, le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$-stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$.

3) q est algébrique, mais pas une racine de l'unité. Soit Q la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K et $\mathcal{O}_Q$ son anneau des entiers. Pour presque toute place finie v de Q, la réduction de q modulo v est une racine de l'unité d'ordre κ_v. Pour chaque v, on fixe un uniformisant v-adique et une puissance entière φ_v de cet uniformisant, telle que $\varpi_v^{-1}(1-q^{\kappa_v})$ soit un entier inversible de $\mathcal{O}_Q$. Nous avons donc :

Théorème 2.4 ([1, Thm. 10.2.1] pour le groupe de Galois générique algébrique, si K est un corps de nombres, et [2, Thm. 8.8] sinon)**.** *Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϖ_v, pour presque toute place finie v de Q.*

1. *i.e.* défini par une famille de polynomes différentiels

L'énoncé précédent a exactement la même signification que le théorème 2.3 en termes de droites stabilisées par les groupes de Galois génériques. Notamment, il existe une base de transcendance $\underline{a}$ de K/Q, un élément primitif b de $K/Q(\underline{a})$ et une algèbre de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Q\left[\underline{a}, b, x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \dots\right]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_Q[\underline{a}, b, x]$, tels qu'il existe un $\mathcal{A}$-réseau Σ_q-stable M de $M_{K(x)}$ qui induit, comme dans le cas précédent des $\mathcal{A}$-réseaux sur les sous-modules des constructions de $M_{K(x)}$. Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est ainsi le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$-stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$.

Les théorèmes précédents se déduisent, suivant l'idée de [8], du Théorème de Chevalley (et de son analogue différentiel [10]) et du critère suivant :

Théorème 2.5 ([1, Thm.7.1.1], [2, Thm.3.1 et Thm.8.1])**.** *Le module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)}$ est banal (*i.e.* il est isomorphe à $K(x)^\nu$ avec l'action de σ_q définie composante par composante) si et seulement s'il existe un ensemble non vide et cofini de courbures égales à l'identité.*

Cela signifie que Σ_q^κ est l'identité, dans le premier cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$ pour presque toute place cyclotomique v dans le deuxième cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ pour presque toute place finie v de Q dans le troisième cas.

3. Application aux D-groupoïdes de Malgrange-Granier

Considérons maintenant un système aux q-différences linéaire (*) $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et $A(x) \in Gl_\nu(\mathbb{C}(x))$. Soient $A_k(x) := A(q^{k-1}x)\dots A(qx)A(x)$, for $k \in \mathbb{Z}_{>0}$; $A_0(x) = Id_\nu$; and $A_k(x) := A(q^k x)^{-1}A(q^{k+1}x)^{-1}\dots A(q^{-1}x)^{-1}$, for $k \in \mathbb{Z}_{k<0}$. Nous allons noter $\mathcal{M}^{(A)}$ le module aux q-différences associé a ce système, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathbb{C}(x)^\nu$ muni de la bijection σ_q-semilinéaire $\Sigma_q : \mathbb{C}(x)^\nu \longrightarrow \mathbb{C}(x)^\nu$, $\Sigma_q(X) = A(x)^{-1}X^{\sigma_q}$. Pour la définition du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ de (*) et pour la définition de D-groupoïde tout court, nous nous référons à [4]. On note $M = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^\nu$ et $J^*(M,M)$ l'espace des jets inversibles de M. Soit $Dyn(A(x)) = \{(x,X) \mapsto (q^k x, A_k(x)X) : k \in \mathbb{Z}\} \subset Aut(M)$ la dynamique du système (*).

Nous considérons d'abord la plus petite sous-variété différentielle $\mathcal{K}ol(A)$ de $Gl_{\nu+1}(\mathbb{C}(x))$, contenant $\left\{diag(q^k, A_k(x)) := \begin{pmatrix} q^k & 0 \\ 0 & A_k(x)\end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ et telle que si $diag(\alpha, \beta(x)), diag(\gamma, \delta(x))$ appartiennent à $\mathcal{K}ol(A)$ alors $diag(\alpha\gamma, \delta(x)\beta(\gamma x))$ appartient à $\mathcal{K}ol(A)$, et son idéal $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ dans l'algèbre différentielle $\mathbb{C}(x)\{T, \det T^{-1}\}_\partial$, avec $T = (T_{i,j})_{i,j=0,\dots,\nu}$. Nous appellerons $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ le D-groupoïde engendré au sens de [9, Thm.4.4.1] par $\langle \frac{\partial \overline{x}}{\partial X}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}x - \overline{x}, \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial X^2}, \frac{\partial \overline{X}}{\partial X}X - \overline{X}, \frac{\partial^2 \overline{X}}{\partial X^2}\rangle$ (*cf.* [4, Thm.2.2]) et l'image par τ de $I_{\mathcal{K}ol(A)}$:

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{C}(x)\left\{T, \frac{1}{\det T}\right\}_{\partial_x} & \longrightarrow & H^0(M \times_{\mathbb{C}} M, \mathcal{O}_{J^*(M,M)}) \\ & (T_{i,j})_{i,j=0,\dots,\nu} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{x}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial X_j}\right)_j \\ \left(\frac{\partial \overline{X}_i}{\partial x}\right)_j & \left(\frac{\partial \overline{X}_i}{\partial X_j}\right)_{i,j} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les déclinaisons, selon la nature de q, du théorème 2.1 permettent de montrer l'égalité entre l'idéal de définition de $Gal^\partial(\mathcal{M}^{(A)})$ et l'idéal différentiel engendré par $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ et $T_{0,0}-1$. On obtient ainsi l'analogue aux q-différences de [9, Cor.5.3.6]

Théorème 3.1 ([2, §9])**.** *Les D-groupoïdes $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ ont les mêmes solutions,* i.e. *des diffeomorphismes obtenus de la façon suivante :*

$$(x,X) \longmapsto (\alpha x, \beta(x)X)\,, \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{pmatrix} \text{ solutions de } I_{\mathcal{K}ol(A)}.$$

Les solutions des D-groupoïdes $\widetilde{\mathcal{G}al(A)}$ et $\widetilde{\mathcal{G}al^{alg}(A)}$, intersections respectives de $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ avec le D-groupoïde engendré par $\langle x - \overline{x}\rangle$, sont les difféomorphismes construits de la façon suivante :

$$(x,X) \longmapsto (x, \beta(x)X)\,, \text{ avec } \beta(x) \text{ solutions de équations différentielles définissants } Gal^\partial(\mathcal{M}^{(A)}).$$

Le théorème précédent généralise un résultat analogue de A. Granier établi pour le systèmes aux q-différences $Y(qx) = AY(x)$, avec $A \in Gl_\nu(\mathbb{C})$ et $q \in \mathbb{C}$, avec $|q| \neq 1$. Dans [2, Cor.6.15], on compare le groupe générique différentiel d'un module aux q-différences avec le groupe différentiel de Hardouin-Singer qui, dans le cas d'un système à coefficients constants, coïncide avec le groupe de Galois usuel.

Références

1. L. Di Vizio, *Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures*, Inventiones Mathematicae **150** (2002), no. 3, 517–578, arXiv :math.NT/0104178.
2. L. DI Vizio et C. Hardouin, *Algebraic and differential generic galois groups for q-difference equations*, followed by the appendix *The Galois D-groupoid of a q-difference system* by Anne Granier, ArXiv :1002.4839.
3. A. Granier, *A local D-groupoid for fuchsian q-difference equations*, Submitted for publication, 2009.
4. ______, *Un D-groupoïde de galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris. Doi : 10.1016/j.crma.2010.01.030, 2010.
5. C. Hardouin and M. F. Singer, *Differential Galois theory of linear difference equations*, Mathematische Annalen **342** (2008), no. 2, 333–377.
6. P. Hendriks, *Algebraic Aspects of Linear Differential and Difference Equations*, Ph.D. thesis, University of Groningen., 1996.
7. I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957.
8. N. M. Katz, *A conjecture in the arithmetic theory of differential equations*, Bulletin de la Société Mathématique de France **110** (1982), no. 2, 203–239.
9. B. Malgrange, *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, pp. 465–501.
10. A. Ovchinnikov, *Chevalley's theorem for linear differential algebraic groups*, Personal communication. (2009).
11. A. Peón Nieto, *On sigmadelta-picard-vessiot extensions*, to appear in Communications in algebra, 2009.