Les exposants

ou le coté obscur

des équations différentielles p-adiques

Gilles Christol

2 avril 2019

Plan de l'exposé

L'utilité des équations différentielles p-adiques

Certaines ED (équations différentielles) avec des propriétés p-adiques remarquables ont été mises en évidence par Dwork lorsqu'il étudiait les fonctions Zéta des *variétés affines non singulières en caractéristique p* .

Le cadre "géométrique" est celui de la cohomologie (à la de Rham) de *Monsky-Washnitzer*. Pour celle-ci la géométrie est en caractéristique p mais les fonctions sont en caractéristique 0 .

Les ED de Dwork sont, en gros, des équations de *Picard-Fuchs tordues* par l'exponentielle "de Dwork" $e^{\pi x}$ avec $\pi^{p-1} = -p$ (elles engendrent, via constructions algébriques, les "*ED venant de la géométrie en caractéristique p*") .

La *finitude* de la cohomologie de M-W se ramène (Mebkhout) à l'existence d'un *indice sur les fonctions analytiques dans le disque unité* pour certaines des ED considérées par Dwork

L'utilité des équations différentielles p-adiques

Certaines ED (équations différentielles) avec des propriétés p-adiques remarquables ont été mises en évidence par Dwork lorsqu'il étudiait les fonctions Zéta des *variétés affines non singulières en caractéristique p* .

Le cadre "géométrique" est celui de la cohomologie (à la de Rham) de *Monsky-Washnitzer*. Pour celle-ci la géométrie est en caractéristique p mais les fonctions sont en caractéristique 0 .

Les ED de Dwork sont, en gros, des équations de *Picard-Fuchs tordues* par l'exponentielle "de Dwork" $e^{\pi x}$ avec $\pi^{p-1} = -p$ (elles engendrent, via constructions algébriques, les "*ED venant de la géométrie en caractéristique p*") .

La *finitude* de la cohomologie de M-W se ramène (Mebkhout) à l'existence d'un *indice sur les fonctions analytiques dans le disque unité* pour certaines des ED considérées par Dwork (elles ont un point singulier régulier à l'infini et un point singulier irrégulier en 0 et c'est ce dernier qui pose problème).

La présence de *nombres de Liouville* parmi les exposants est une obstruction immédiate à l'existence d'un indice. Mais le rôle central de ce problème est beaucoup plus profond que prévu.

L'utilité des équations différentielles p-adiques

L'origine géométrique des ED de Dwork a pour conséquence :

• le rayon 1 y joue un rôle particulier,

• elles sont munies d'un "Frobenius". Mais ce Frobenius n'est pas rationnel et ne peut être défini que si on fait intervenir le complété p-adique de $K(x)$ ("éléments analytiques").

• ce Frobenius implique qu'elles sont solubles avec exposants rationnels.

• Elles peuvent avoir des singularités irrégulières.

Les ED solubles à exposants non rationnels, peuvent être pathologiques. En fait Mebkhout a montré que les ED solubles $\mathcal{M}$ ayant un Frobenius sont celles dont les exposants, les exposants de $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ ainsi que les résidus des wronskiens des composantes irréductibles, sont rationnels.

Thèmes absents de cet exposé où souvent les exposants compliquent la tâche : théorie globale des ED p-adiques, cohomologie avec coefficients, recollement des variétés affines non singulières, situation relative (où tout n'est pas encore réglé), ...

Notations : modules différentiels

Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre munie d'une dérivation D de noyau réduit à K. Dans cet exposé on aura toujours $D = \frac{d}{dx}$.

Un *$\mathcal{A}$-module différentiel* ($\mathcal{A}$-MD) est un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$, *libre de rang fini* , muni d'une action de D vérifiant $D(am) = D(a)\,m + a\,D(m)$.

La matrice G qui *représente D* dans une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ est définie par $D(\mathfrak{e}_i) = \sum G_{ij}\,\mathfrak{e}_j$ [c'est la transposée de la matrice de D dans la base $\mathfrak{e}$].

On écrit $F \sim_{\mathcal{A}} G$ lorsque F et G représentent D dans deux bases d'un même $\mathcal{A}$-MD . Cela signifie qu'il existe $H \in \mathrm{Gl}(\mathcal{A})$: $D(H) = GH - HF$.

Si $\mathcal{A}$ est un corps, tout $\mathcal{A}$-MD $\mathcal{M}$ a une "*base cyclique*"

$$\{a,\ D(a), \ldots,\ D^{\mu-1}(a)\} \qquad (a \in \mathcal{M})$$

donnant $\mathcal{M} = \mathcal{A}[D]/\mathcal{A}[D]\,L$ pour $L \in \mathcal{A}[D]$ de degré μ.

Notations : solutions

Soit $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ une K-algèbre sur laquelle D se prolonge
et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-MD de rang μ .

Une *solution de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}$* est une application linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}^\mu$ qui commute à D (application horizontale).

L'ensemble $S(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ des solutions de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}$ est un K-espace vectoriel de dimension $\leq \mu$.

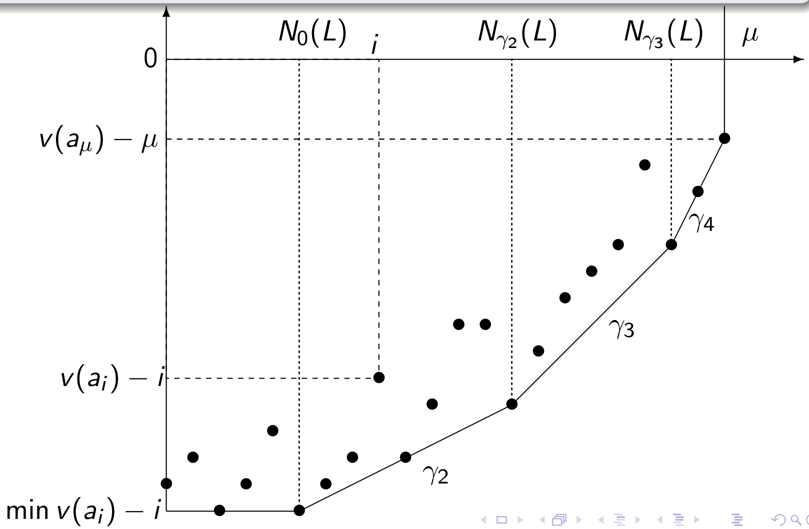
Si $S(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ est de dimention μ, on dit que $\mathcal{M}$ est *soluble* dans $\mathcal{B}$.

Si G représente D dans une base de $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ est l'ensemble des $X \in \mathcal{B}^\mu$ solutions du *système différentiel* (SD) $D(X) = G\,X$.

Il existe $X \in \mathrm{Gl}(\mathcal{B})$ t.q. $D(X) = G\,X$ ssi $\mathcal{M}$ est soluble dans $\mathcal{B}$.

Pour $\mathcal{M} = \mathcal{A}[D]/\mathcal{A}[D]\,L$ (avec $L \in \mathcal{A}[D]$ de degré μ) $S(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ est l'ensemble des solutions de l'*équation différentielle* (ED) $L(f) = 0$
$[f \leftrightarrow (f, ..., D(f)^{\mu-1})$ pour le SD] .

Le *polygone de Newton* de $L = \sum_{i=0}^{\mu} a_i D^i$, $a_i \in \mathbb{C}((x))$, est l'enveloppe convexe des $\big(i, v_x(a_i) - i\big)$ et de $\big(0, \min_i\{v_x(a_i) - i\}\big)$.



Définition

Les pentes $0 \leq \gamma_1 < \cdots < \gamma_\nu$ *de* L *sont les pentes des cotés non verticaux de son polynôme de Newton.*

La multiplicité de γ_i *est la longueur du coté de pente* γ_i *.*

Les pentes sont des nombres rationnels positifs ou nuls.

Définition

Soit $\mathcal{M}$ *un* $\mathbb{C}((x))$*-module différentiel. A chaque base cyclique de* $\mathcal{M}$ *est associée une "présentation"* $\mathcal{M} = \mathbb{C}((x))[D]/\mathbb{C}((x))\, L$ *.*
Les pentes (avec multiplicité) des polynômes différentiels L *ainsi obtenus sont indépendantes de la base cyclique.*
Par définition ce sont les pentes (et multiplicités) de $\mathcal{M}$ *.*

C'est pour avoir cette indépendance par changement de base cyclique que l'on a exclu les pentes négatives dans la définition du polygône de Newton.

Théorie formelle : Théorèmes

Théorème de décomposition suivant les pentes

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{C}((x))$-MD de pentes $\{\gamma_i\}$. On a $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_{\gamma_i}$
où $\mathcal{M}_{\gamma_i}$ a une seule pente γ_i (et pour dimension la multiplicité de γ_i) .

Structure de la partie régulière

Dans une base de $\mathcal{M}_0$, $x\,D$ est représentée par une matrice constante C.
Si $D(X) = G\,X$ est le SD associé, alors $X = A\,x^C$ avec $A \in \mathrm{Gl}\left(\mathbb{C}((x))\right)$.
Les *exposants* de $\mathcal{M}$ sont les valeurs propres de la matrice C .
Ils sont définis à l'ordre près (avec répétition) dans $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Théorème de Turritin

Si $D(X) = G\,X$ est le SD associé à $\mathcal{M}_{\gamma_i}$ alors $X(x) = A(y)\,y^C e^{P(y)}$ où
- $y = x^{1/d}$ pour un diviseur d de $\mu!$,
- A une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}((y))$,
- P une matrice diagonale à coefficients dans $\frac{1}{y}\mathbb{C}[\frac{1}{y}]$, $\deg_x P = -\gamma_i$
- C une matrice constante qui commute avec P .

	Corps	Construction	Propriétés	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_p$			
$\cap$	$\cap$			
$\mathbb{C}$	K	extension finies	localement compact	•
	$\cap$			
	$\mathbb{Q}_p^{\mathtt{alg}}$	clôture algébrique	algébriquement clos	
	$\cap$			
	$\mathbb{C}_p$	complété	algébriquement clos et complet	
	$\cap$			
	Ω	ext. maximale	alg. clos et sphériquement complet	•

Les "grands" théorèmes d'analyse fonctionnelle (Banach, ...) sont vrais dans Ω mais pas dans $\mathbb{C}_p$.

En particulier le prolongement de la forme linéaire "limite" des suites convergentes aux suites bornées fournit un succédané à la locale compacité (suite extraite convergente).

L'anneau de Robba : définition et propriétés algébriques

L'anneau $\mathcal{R}$ dit "*de Robba*" est l'analogue p-adique du corps : $\mathbb{C}((x))$.

Définition

$\mathcal{R}$ est l'anneau des K-séries de Laurent qui convergent dans une couronne $\{|x| \in I_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=}]1-\varepsilon, 1[\}$ ($\varepsilon > 0$ non précisé) :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}(I_\varepsilon) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \; ; \; a_s \in K, \lim_{s \to \pm\infty} \rho^s |a_s| = 0 \text{ pour } \rho \in I_\varepsilon \right\}$$

Théorème (Michel Lazard)

Si K est sphériquement complet, tout idéal de type fini de $\mathcal{R}$ est principal et tout sous-module de type fini d'un $\mathcal{R}$-module libre de type fini est libre [on dit que $\mathcal{R}$ est un anneau de Bezout].

Corollaire (pour les amateurs de géométrie algébrique)

$\mathcal{R}$ n'est pas noethérien mais c'est un anneau cohérent et tout $\mathcal{R}$-module sans torsion est plat.

L'anneau de Robba : propriétés topologiques

- Pour I fermé, $\mathcal{A}(I)$ est un Banach pour la norme $\|f\|_I \overset{\text{déf}}{=} \max_{|x|\in I}|f(x)|$.
- Sinon, c'est un Fréchet (métrique complet) pour les $|f|_\rho \overset{\text{déf}}{=} \|f\|_{[\rho]}$ $(\rho \in I)$
- $\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{A}(I_\varepsilon)$ est donc un espace $\mathcal{LF}$ (limite inductive de Fréchet) .

Théorème (Grothendieck –1955)

Toute application linéaire continue surjective entre espaces $\mathcal{LF}$ est ouverte.

- La formule $\sum_{s\in\mathbb{Z}} = \sum_{s=0}^{\infty} + \sum_{-s=1}^{\infty}$ donne une décomposition

$$\mathcal{R} = \mathcal{A} \bigoplus \mathcal{H} \ , \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}\big([0,1[\big) \ , \quad \mathcal{H} = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{A}(]1-\varepsilon, \infty]_0)$$

[où la notation $]_0$ indique que les fonctions sont nulles à l'infini !]

$\mathcal{A}$ $(\mathcal{F})$ et $\mathcal{H}$ $(\mathcal{LF})$ sont en dualité parfaite $\left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s . \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^{-s} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s b_{s+1}\right)$

$\mathcal{R}$ est son propre dual. Les Banach autoduals sont de dimension finie.
$\mathcal{R}$ semble être l'analogue p-adique le plus simple d'un espace de Hilbert !

Les solutions d'une ED complexe convergent jusqu'à la première singularité. Ce n'est pas vrai pour les ED p-adiques (par exemple pour e^x).

Définition (de la fonction rayon de convergence d'un SD)

Soit G une matrice à coefficients dans $\mathcal{A}(I)$ et $\rho \in I$. On pose

$$\mathrm{ray}(G, \rho) \overset{\text{déf}}{=} \min \left(\rho, \liminf_{s \to \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho^{-1/s} \right)$$

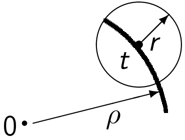
où $\|G\|_\rho = \max |G_{ij}|_\rho$ et G_s défini par $G_1 = G$ et $G_{s+1} = D(G_s) + G_s\, G$.

La fonction $v \mapsto \log \mathrm{ray}(G, e^v)$ est *concave* et bornée par $\log(e^v) = v$.

Si I est un intervalle ouvert, elle a donc une limite aux extrémités de $\log I$.

Une matrice G à coefficients dans $\mathcal{R}$ est en fait à coefficients dans $\mathcal{A}(I_G)$ avec $I_G =]\varepsilon_G, 1[$. On constate que $\mathrm{ray}(G, \rho)$ a une limite $\mathrm{ray}(G, 1)$ quand ρ tend vers 1^- .

On a tout fait pour que :



$$\mathrm{ray}(G,\rho) = \max\left\{ r \leq \rho \ ; \ (\forall\ |t| = \rho)(\exists X \in \mathrm{Gl}\left(\mathcal{A}(t,r)\right))\ X' = G\,X \right\} .$$

Par suite, si $F \sim_{\mathcal{R}} G$, on a $\mathrm{ray}(F,\rho) = \mathrm{ray}(G,\rho)$ pour $\rho \in I_G \cap I_F$. Les fonctions $\mathrm{ray}(G,\rho)$ pour G représentant D dans les différentes bases de $\mathcal{M}$ ont le même *germe en* 1^- . Il est noté $\mathtt{Ray}(\mathcal{M},\rho)$.

Définition

Un $\mathcal{R}$-MD $\mathcal{M}$ est dit soluble si $\mathtt{Ray}(\mathcal{M},1) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\rho\to 1^-} \mathtt{Ray}(\mathcal{M},\rho) = 1$.

Théorème (plus grande pente d'un $\mathcal{R}$-MD soluble)

Pour un $\mathcal{R}$-MD $\mathcal{M}$ soluble, on a $\mathtt{Ray}(\mathcal{M},\rho) = \rho^{\gamma+1}$ *(ρ près de 1)* *pour un $\gamma \geq 0$ appelé plus grande pente de $\mathcal{M}$.*

Pentes : théorème de décomposition

Définition

Un $\mathcal{R}$-MD est dit pur de pente γ *si, pour t "générique" avec $|t| = \rho \in I_\varepsilon$, TOUTES ses solutions en t ont un rayon de convergence égal à $\rho^{\gamma+1}$.*

Théorème (de décomposition)

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-MD soluble de plus grande pente γ .
Il existe des nombres γ_i , $0 \leq \gamma_1 < \cdots < \gamma_\nu = \gamma$, appelés pentes de $\mathcal{M}$,
tels que $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_{\gamma_i}$ où $\mathcal{M}_{\gamma_i}$ est pur de pente γ_i .
La multiplicité μ_i *de γ_i est le rang de $\mathcal{M}_{\gamma_i}$.*

Théorème (de Hasse-Arf p-adique)

Les produits $\mu_i \gamma_i$ sont des entiers.

$\mu_i \gamma_i$ est l'*indice généralisé* de $\mathcal{M}_{\gamma_i}$, càd l'indice sur $\mathcal{A}^\mu$ de $\mathrm{pr} \circ (xD - xG)$ où pr est la projection $\mathcal{R}^\mu \to \mathcal{A}^\mu$ et G la matrice de D dans une base de $\mathcal{M}_{\gamma_i}$.
Une pente γ_i est donc un rationnel dont le dénominateur divise $\mu_i \leq \mu$.

Frobenius : structure forte et structure faible

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-MD de rang μ et soit G la matrice représentant D dans une base de $\mathcal{M}$. On note X "la" solution du SD $D(X) = G\,X$.

Au Frobenius $\varphi(x) = x^p$ on associe :

- l'image inverse $\varphi^*(\mathcal{M})$, associée au SD de solution $X(x^p)$, donc de rang μ et pour lequel D est représentée par la matrice $p\,x^{p-1}G(x^p)$,
- l'image directe $\varphi_*(\mathcal{M})$, associée au SD de solution $\{X(y), X(\zeta y), \ldots, X(\zeta^{p-1}y)\}$ $(\zeta^p = 1,\ y^p = x)$, donc de rang $p\,\mu$.
- Pour $\mathcal{M}$ *soluble*, $\varphi_*(\mathcal{M})$ contient un *unique sous-MD soluble* de rang μ . C'est l'*antécédent de Frobenius* noté $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$, car $\varphi^*\big(\varphi^{-1}(\mathcal{M})\big) = \mathcal{M}$.

Structure de Frobenius forte

On dit que $\mathcal{M}$ *a un Frobenius s'il existe* $h \geq 1$ *t.q.* $(\varphi^*)^h(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ *.*

Structure de Frobenius faible

Le $\mathcal{R}$*-MD* $\mathcal{M}$ *est soluble ssi* $(\forall h \in \mathbb{N})\ (\exists\ \mathcal{M}_h)$ *t.q.* $(\varphi^*)^h(\mathcal{M}_h) = \mathcal{M}$ *.*

Frobenius : l'exemple fondamental

Pour $a \in K$, on pose $\mathcal{L}_a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}[D]/\mathcal{R}[D]\big(x\,D - a\big)$ solution x^a

- $\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_b$ ssi $a \equiv b \mod \mathbb{Z}$, $x^a = x^n\,x^b$
- $\mathcal{L}_a$ est soluble ssi $a \in \mathbb{Z}_p$, $(1 + \frac{x-t}{t})^a = \sum \binom{a}{n} x^n$
- $\varphi^*(\mathcal{L}_a) = \mathcal{L}_{pa}$, $(x^p)^a = x^{pa}$
- $\varphi_*(\mathcal{L}_a) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{L}_{\frac{a-i}{p}}$. $x^{\frac{a-i}{p}} = y^{a-i}$
- Pour $a \in \mathbb{Z}_p$, $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_a) = \mathcal{L}_{\frac{a-i}{p}}$ avec $i \equiv a \mod p$

  (on peut prendre et on prendra $i \in \{-\frac{p-1}{2}, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$) .

La structure de Frobenius de $\mathcal{L}_a$ donne le dvlpt de Hensel de a .

Dans le cas général (où on ne connait pas a priori les exposants) on va utiliser la structure de Frobenius pour trouver la suite $\{i_1, \ldots, i_\mu\}$ des dvlpts de Hensel des "exposants".

La situation est compliquée par des problèmes de commutation ... mais a été largement simplifiée grâce à une superbe astuce de Dwork.

Modules de Robba : ensemble des exposants

Définition

Un $\mathcal{R}$-MD est dit de Robba s'il est soluble et de plus grande pente nulle, il est alors pur de pente 0 .

Par exemple le $\mathcal{R}$-MD $\mathcal{L}_a$ est de Robba ssi $a \in \mathbb{Z}_p$.

Définition

Un $\mathcal{R}$-MD soluble $\mathcal{M}$ est dit régulier s'il a une base $\mathfrak{e}$ dans laquelle $x\,D$ est représenté par une matrice constante C. Les valeurs propres $\{a_i\}$ de C forment une famille de $\{\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}\}^{\mu}$ indépendante de la base $\mathfrak{e}$. On l'appelle famille des exposants de $\mathcal{M}$.

- C'est la solubilité qui donne $a_i \in \mathbb{Z}_p$.
- Un $\mathcal{R}$-MD est régulier si et seulement s'il peut être obtenu par extensions successives des $\mathcal{L}_{a_i}$.
- Si $\mathcal{M} = \mathcal{R}[D]/\mathcal{R}[D]L$ (base cyclique), a_i est un exposant de $\mathcal{M}$ si et seulement si $\exists f \in \mathcal{R}\ :\ L(x^{a_i} f) = 0$ (on parle alors d'exposant "naïf").

Modules de Robba : ensemble des exposants

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-MD de Robba. La structure de Frobenius fournit la *famille* $\{a_{i,h}\}$ des *digits* des a_i cherchés et seulement dans chacune des fenêtres $F_n \stackrel{\text{déf}}{=} \big[s \in [m_n, n]\,,\ i \in [1, \mu]\big]$ avec $m_n \sim \log n$.

			$\log n$		n		
a_1	?	?	?	a_{1,m_n}	$\cdots$	$a_{1,n}$	?	$\cdots$
				$\cdots$				
a_i	?	?	?	a_{i,m_n}	$\cdots$	$a_{i,n}$	?	$\cdots$
				$\cdots$				
a_μ	?	?	?	a_{μ,m_n}	$\cdots$	$a_{\mu,n}$	?	$\cdots$

Pour recoller ces fenêtres, il faut pouvoir distinguer les lignes i et j .
Ceci n'est possible que si $a_{i,h} \neq a_{j,h}$ pour un $h \in [m_n, n]$.

Sinon $\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} a_i - a_j \equiv r_n \pmod{p^n}$ avec $|r_n| < p^{m_n} = O(n)$.

$\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ vérifiant ceci pour une infinité de n est dit *de Liouville* ,

$\Leftrightarrow \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha - s} x^s$ ou $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + s} x^s$ a un rayon de convergence < 1

On note $\stackrel{\exp}{\sim}$ l'équivalence : "avoir mêmes familles images dans les F_n " .

Définition (ensemble des exposants)

L'ensemble des exposants est le quotient $\mathfrak{E}_\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p^\mu / \stackrel{\exp}{\sim}$.

Si les différences $(a_i - a_j)$ *ne sont pas de Liouville,*
la classe de $\{a_i\}$ *dans* $\mathfrak{E}_\mu$ *contient une seule famille de* $\{\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}\}^\mu$.

Théorème (struture des modules de Robba)

A partir d'un $\mathcal{R}$-MD de Robba $\mathcal{M}$ *, de rang* μ *, on construit (par un processus analytique) un élément* $\exp_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{E}_\mu$ *appelé exposant de* $\mathcal{M}$.

Si les différences $(a_i - a_j)$ *d'un représentant* $\{a_i\}$ *de* $\exp_{\mathcal{M}}$ *sont non Liouville, alors* $\mathcal{M}$ *est régulier et la famille des exposants de* $\mathcal{M}$ *est un représentant de* $\exp_{\mathcal{M}}$.

Modules de Robba : un exemple de pathologie

Les $I_k = \left\{\frac{-k+m(m+1)}{2}\right\}_{m\geq k}$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Soit $\{r_k\}$ une suite décroissante de limite 0 . On définit $\varphi(h)$ par

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(h+1) = [(r_0 - r_k)p^{\varphi(h)}] + h \quad \text{pour } h \in I_k \ ,$$

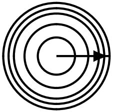
on trouve $\lim_{\substack{h\to\infty \\ h\in I_k}} \frac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} = r_0 - r_k$

On pose : $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{m_h}p^{\varphi(h)}$, et on considère l'ED

$$\mathbf{L}_\alpha = x^3D^2 + (1-\alpha)x^2\,D - q \qquad \text{avec} \quad v(q) = \frac{2}{p-1} + r_0$$

On montre que $\mathcal{M}_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{R}[D]/\mathcal{R}[D]\,\mathbf{L}_\alpha$ est de Robba et que,

pour chaque k, $\mathbf{L}_\alpha(f) = 0$ a une solution de la forme $x^{\alpha_k}\ f(x)$
avec f analytique dans la couronne $v(x) \in]r_{k+1}, r_k[$


1

où la paire $\{\alpha_k, \alpha - \alpha_k\}$ appartient à la classe de $\{\alpha, 0\}$ dans $\mathfrak{E}_2$.

Et les modules différentiels de pente non nulle ?

Théorème de Turritin p-adique

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-MD *muni d'un Frobenius*.

Il existe une extension *séparable* finie $\overline{K}((y))$ de $\overline{K}((x))$ telle que le $\mathcal{R}(y)$-MD $M \otimes_{\mathcal{R}(x)} \mathcal{R}(y)$ soit une extension de MD triviaux (isomorphes à $\mathcal{R}(y)$).

Si $D(X) = G\,X$ est le SD associé à $\mathcal{M}$ alors $X(x) = A(y)\,y^C$ où

A est une matrice inversible à coefficients dans $\mathcal{R}[y]$ et

C une matrice constante *nilpotente*.

Autrement dit, X est à coefficients dans $\mathcal{R}[y, log(y)]$.

L'extension $\mathcal{R}[y]/\mathcal{R}$ est une composée de

- ramifications $y^d = x$ avec d premier à p .
- extensions d'Artin-Schreier $y^p - y = f(1/x)$ $f \in K[x]$.