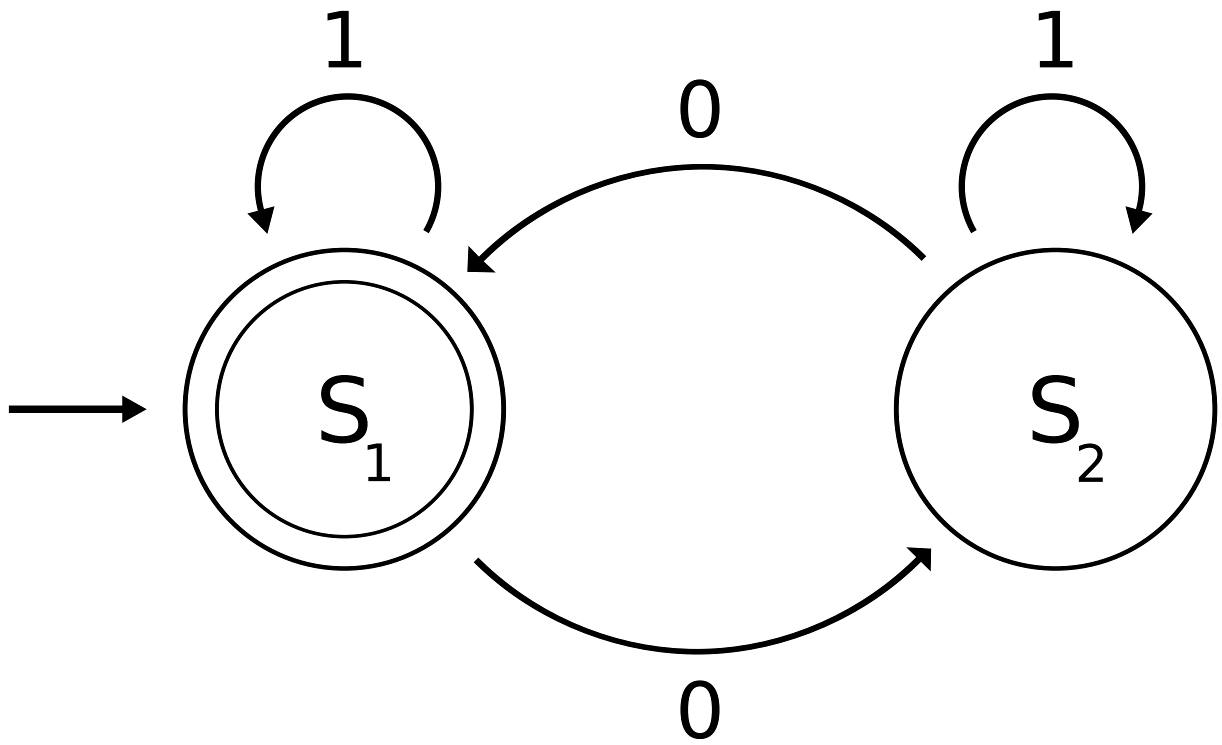
Systèmes cohérents d'équations différentielles et aux différences linéaires

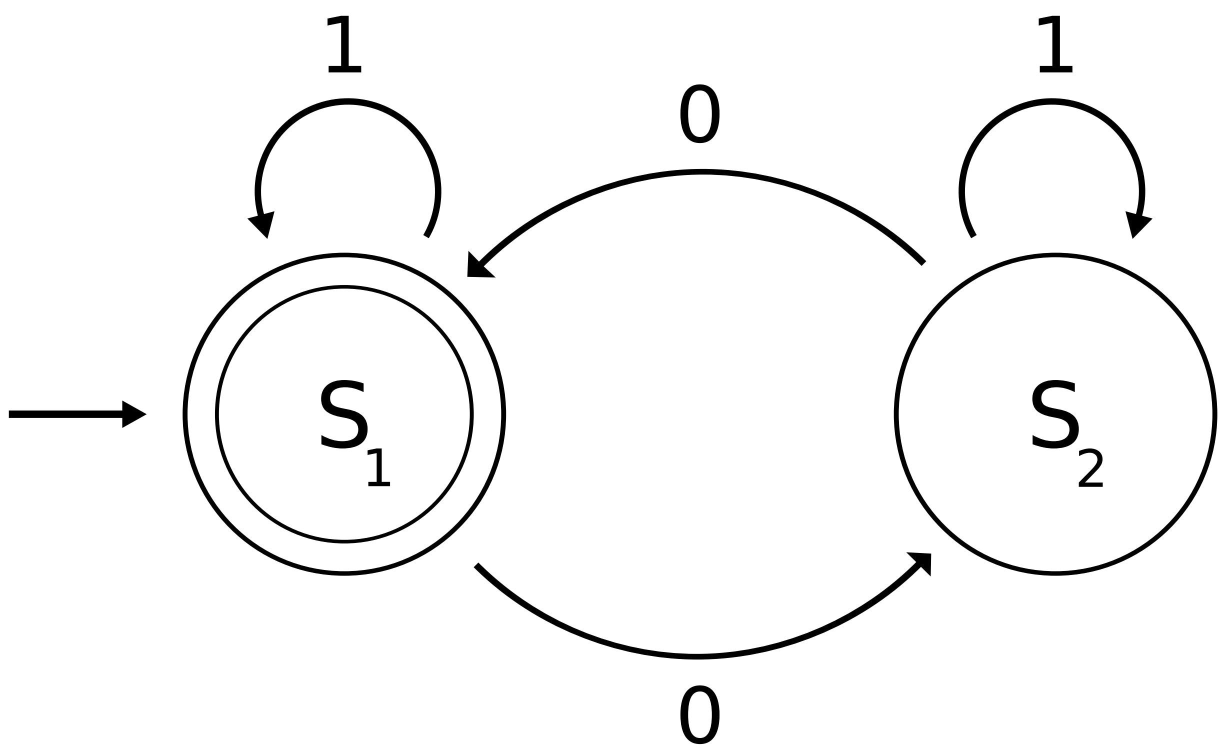
travail en commun avec Michael Singer (NCSU, Raleigh, USA)

Un automate fini simple



Il détermine si la représentation binaire d'un nombre contient un nombre pair de 0s. S_1 est un état d'acceptation.

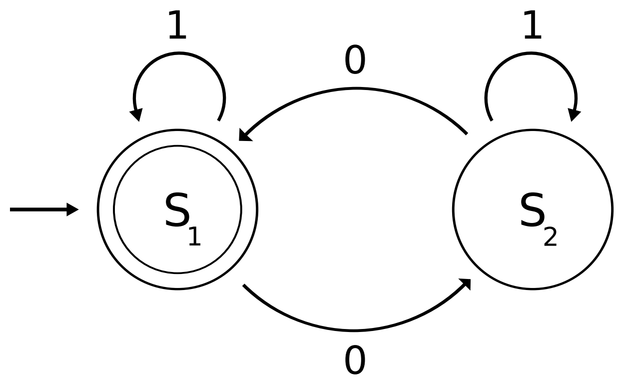
Un automate fini simple



Il détermine si la représentation binaire d'un nombre contient un nombre pair de 0s. S_1 est un état d'acceptation.

Posons $a_n = 1$ si la représentation binaire de n contient un nombre *pair* de 0s, sinon $a_n = 0$.

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (101100101...)$ est une *suite 2-automatique*.



Un automate fini est un quintuplet $M = (\Sigma, S, s_0, \varphi, \mathcal{F})$, où

- Σ est l'alphabet. Ici $\Sigma = \{0, 1, ..., k-1\}$ (base k).
- S est l'ensemble des états.
- $s_0 \in S$ est l'état initial.
- φ est la fonction de transition $\varphi : S \times \Sigma \to S$
- $\mathcal{F}$ est l'ensemble des états d'acceptation.

Un automate fini est un quintuplet $M = (\Sigma, S, s_0, \varphi, \mathcal{F})$, où

- Σ est l'alphabet. Ici $\Sigma = \{0, 1, ..., k-1\}$ (base k).
- S est l'ensemble des états.
- $s_0 \in S$ est l'état initial.
- φ est la fonction de transition $\varphi : S \times \Sigma \to S$
- $\mathcal{F}$ est l'ensemble des états d'acceptation.

La fonction φ est étendue à des mots $d = d_1 d_2 ... d_r$ de l'alphabet Σ – c.a.d. des entiers positifs écrits en base k – par la formule

$$\varphi(s_0, d) = \varphi(\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_{r-1}), d_r). \tag{1}$$

d est accepté, si cette état est dans $\mathcal{F}$, sinon rejeté.

Un automate fini est un quintuplet $M = (\Sigma, S, s_0, \varphi, \mathcal{F})$, où

- Σ est l'alphabet. Ici $\Sigma = \{0, 1, ..., k-1\}$ (base k).
- S est l'ensemble des états.
- $s_0 \in S$ est l'état initial.
- φ est la fonction de transition $\varphi : S \times \Sigma \to S$
- $\mathcal{F}$ est l'ensemble des états d'acceptation.

La fonction φ est étendue à des mots $d = d_1 d_2 ... d_r$ de l'alphabet Σ – c.a.d. des entiers positifs écrits en base k – par la formule

$$\varphi(s_0, d) = \varphi(\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_{r-1}), d_r). \tag{1}$$

d est accepté, si cette état est dans $\mathcal{F}$, sinon rejeté.
Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de 0s et 1s est appelée

k-automatique

s'il existe un automate fini avec alphabet $\Sigma = \{0, 1, ..., k-1\}$, tel que $a_n = 1$ si la représentation $d_1 d_2 ... d_r$ de n en base k est accepté, sinon $a_n = 0$.

Exemples de suites automatiques :

- Les suites périodiques sont k-automatiques pour tout k.

Exemples de suites automatiques :

- Les suites périodiques sont k-automatiques pour tout k.
- Les suites périodiques avec pré-période sont k-automatiques pour tout k.

Exemples de suites automatiques :

- Les suites périodiques sont k-automatiques pour tout k.
- Les suites périodiques avec pré-période sont k-automatiques pour tout k.
- L'ensemble des puissances de 2 est 2-automatique. Est-il 3-automatique ?

Exemples de suites automatiques :

- Les suites périodiques sont k-automatiques pour tout k.
- Les suites périodiques avec pré-période sont k-automatiques pour tout k.
- L'ensemble des puissances de 2 est 2-automatique. Est-il 3-automatique ?

Théorème. (Cobham 1962) *Soit p et q des entiers multiplicativement indépendants. Alors une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de 0s et 1s est à la fois p- et q-automatique si et seulement si elle est périodique avec pré-période.*

Théorème. (Cobham 1962) *Soit p et q des entiers multiplicativement indépendants. Alors une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de 0s et 1s est à la fois p- et q-automatique si et seulement si elle est périodique avec pré-période.*

Idée de notre preuve. Considérons la série génératrice $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$. Rappelons la récurrence

$$\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_r) = \varphi(\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_{r-1}), d_r), \qquad (2)$$

où $d_1 d_2 ... d_r$ est l'écriture de m en base p.

Elle mène à des relations entre $g(x)$, $g(x^p)$, $g(x^{p^2})$, ...

Théorème. (Cobham 1962) *Soit p et q des entiers multiplicativement indépendants. Alors une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de 0s et 1s est à la fois p- et q-automatique si et seulement si elle est périodique avec pré-période.*

Idée de notre preuve. Considérons la série génératrice $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$. Rappelons la récurrence

$$\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_r) = \varphi(\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_{r-1}), d_r), \tag{2}$$

où $d_1 d_2 ... d_r$ est l'écriture de m en base p.

Elle mène à des relations entre $g(x)$, $g(x^p)$, $g(x^{p^2})$, ... Finalement, $g(x)$ satisfait une équation de p-Mahler *linéaire homogène*

$$\sigma^m(g(x)) + b_{m-1}(x)\sigma^{m-1}(g(x)) + ... + b_0(x)g(x) = 0. \tag{3}$$

Ici σ associe à toute série $h(x)$ la série $h(x^p)$; les $b_j(x)$ sont dans $\mathbb{Q}(x)$.

Théorème. (Cobham 1962) *Soit p et q des entiers multiplicativement indépendants. Alors une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de 0s et 1s est à la fois p- et q-automatique si et seulement si elle est périodique avec pré-période.*

Idée de notre preuve. Considérons la série génératrice $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$. Rappelons la récurrence

$$\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_r) = \varphi(\varphi(s_0, d_1 d_2 ... d_{r-1}), d_r), \qquad (2)$$

où $d_1 d_2 ... d_r$ est l'écriture de m en base p.

Elle mène à des relations entre $g(x)$, $g(x^p)$, $g(x^{p^2})$, ... Finalement, $g(x)$ satisfait une équation de p-Mahler *linéaire homogène*

$$\sigma^m(g(x)) + b_{m-1}(x)\sigma^{m-1}(g(x)) + ... + b_0(x)g(x) = 0. \qquad (3)$$

Ici σ associe à toute série $h(x)$ la série $h(x^p)$; les $b_j(x)$ sont dans $\mathbb{Q}(x)$.

Lemme. *La série génératrice d'une suite p-automatique satisfait une équation de p-Mahler avec des coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$.*

Le théorème de Cobham est donc un corollaire du théorème suivant,

Théorème. *(Adamczewski/Bell 13) Soit* p *et* q *multiplicativement indépendant et* $g(x)$ *une série formelle satisfaisant à la fois une équation de* p*- et de* q*-Mahler avec des coefficients dans* $\mathbb{C}(x)$*. Alors* $g(x)$ *est rationelle.*

Le théorème de Cobham est donc un corollaire du théorème suivant,

Théorème. *(Adamczewski/Bell 13) Soit p et q multiplicativement indépendant et $g(x)$ une série formelle satisfaisant à la fois une équation de p- et de q-Mahler avec des coefficients dans $\mathbb{C}(x)$. Alors $g(x)$ est rationelle.*

En effet, si $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$ est rationelle, alors la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ satisfait une récurrence linéaire homogène si m est assez grand. Donc un nombre fini de a_m détermine le reste de la suite.

Le théorème de Cobham est donc un corollaire du théorème suivant,

Théorème. *(Adamczewski/Bell 13) Soit p et q multiplicativement indépendant et $g(x)$ une série formelle satisfaisant à la fois une équation de p- et de q-Mahler avec des coefficients dans $\mathbb{C}(x)$. Alors $g(x)$ est rationelle.*

En effet, si $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$ est rationelle, alors la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ satisfait une récurrence linéaire homogène si m est assez grand. Donc un nombre fini de a_m détermine le reste de la suite.

Comme la valeur d'un a_m ne peut être que 0 et 1, le principe des tiroirs s'applique et la suite doit être périodique avec pré-période.

Réduction à un système cohérent

Soit $g(x)$ une série formelle satisfaisant deux équations de Mahler

$$\sigma_j^{m_j}(g(x))+c_{m-1,j}(x)\sigma_j^{m_j-1}(g(x))+\ldots+c_{0,j}(x)g(x)=0,\quad j=1,2$$

où $\sigma_1(h(x))=h(x^p)$, $\sigma_2(h(x))=h(x^q)$ et $c_{k,j}(x)\in\mathbb{C}(x)$.

Réduction à un système cohérent

Soit $g(x)$ une série formelle satisfaisant deux équations de Mahler

$$\sigma_j^{m_j}(g(x))+c_{m-1,j}(x)\sigma_j^{m_j-1}(g(x))+\ldots+c_{0,j}(x)g(x)=0,\quad j=1,2$$

où $\sigma_1(h(x))=h(x^p)$, $\sigma_2(h(x))=h(x^q)$ et $c_{k,j}(x)\in\mathbb{C}(x)$. Considérons le $\mathbb{C}(x)$-sous-espace W de $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ engendré par toutes les $\sigma_1^k\sigma_2^\ell(g(x))$. Sa dimension est finie et il est invariant par σ_1, σ_2.

Réduction à un système cohérent

Soit $g(x)$ une série formelle satisfaisant deux équations de Mahler

$$\sigma_j^{m_j}(g(x))+c_{m-1,j}(x)\sigma_j^{m_j-1}(g(x))+\ldots+c_{0,j}(x)g(x)=0, \quad j=1,2$$

où $\sigma_1(h(x))=h(x^p)$, $\sigma_2(h(x))=h(x^q)$ et $c_{k,j}(x)\in\mathbb{C}(x)$.
Considérons le $\mathbb{C}(x)$-sous-espace W de $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ engendré par toutes les $\sigma_1^k\sigma_2^\ell(g(x))$. Sa dimension est finie et il est invariant par σ_1,σ_2.
Choisissons une $\mathbb{C}(x)$-base $w(x)=(w_1(x),...,w_d(x))$ de W. Alors il existe des matrices inversible $B_j(x)\in\mathbb{C}(x)$ telles que

$$\sigma_j(w(x))=B_j(x)\,w(x),\ \ j=1,2.$$

Réduction à un système cohérent

Soit $g(x)$ une série formelle satisfaisant deux équations de Mahler

$$\sigma_j^{m_j}(g(x))+c_{m-1,j}(x)\sigma_j^{m_j-1}(g(x))+\ldots+c_{0,j}(x)g(x)=0, \quad j=1,2$$

où $\sigma_1(h(x))=h(x^p)$, $\sigma_2(h(x))=h(x^q)$ et $c_{k,j}(x)\in\mathbb{C}(x)$.
Considérons le $\mathbb{C}(x)$-sous-espace W de $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ engendré par toutes les $\sigma_1^k\sigma_2^\ell(g(x))$. Sa dimension est finie et il est invariant par σ_1,σ_2.
Choisissons une $\mathbb{C}(x)$-base $w(x)=(w_1(x),...,w_d(x))$ de W. Alors il existe des matrices inversible $B_j(x)\in\mathbb{C}(x)$ telles que

$$\sigma_j(w(x))=B_j(x)\,w(x), \ j=1,2.$$

Elles satisfont une condition de cohérence, car

$$0=\sigma_1\sigma_2(w)-\sigma_2\sigma_1(w)=(\sigma_1(B_2)B_1-\sigma_2(B_1)B_2)w.$$

Réduction à un système cohérent

Soit $g(x)$ une série formelle satisfaisant deux équations de Mahler

$$\sigma_j^{m_j}(g(x))+c_{m-1,j}(x)\sigma_j^{m_j-1}(g(x))+\ldots+c_{0,j}(x)g(x)=0, \quad j=1,2$$

où $\sigma_1(h(x))=h(x^p)$, $\sigma_2(h(x))=h(x^q)$ et $c_{k,j}(x)\in\mathbb{C}(x)$.
Considérons le $\mathbb{C}(x)$-sous-espace W de $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ engendré par toutes les $\sigma_1^k\sigma_2^\ell(g(x))$. Sa dimension est finie et il est invariant par σ_1,σ_2.
Choisissons une $\mathbb{C}(x)$-base $w(x)=(w_1(x),...,w_d(x))$ de W. Alors il existe des matrices inversible $B_j(x)\in\mathbb{C}(x)$ telles que

$$\sigma_j(w(x))=B_j(x)\,w(x),\ j=1,2.$$

Elles satisfont une condition de cohérence, car

$$0=\sigma_1\sigma_2(w)-\sigma_2\sigma_1(w)=(\sigma_1(B_2)B_1-\sigma_2(B_1)B_2)w.$$

La condition de cohérence est donc

$$\sigma_1(B_2)B_1=\sigma_2(B_1)B_2.$$

Le théorème d'Adamczewski/Bell est alors une conséquence de
Théorème. *Considérons* σ_1, σ_2 *comme avant et un système*

$$\sigma_j(w(x)) = B_j(x)\, w(x),\ \ j = 1, 2,$$

avec des matrices $B_j(x) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}(x))$ *satisfaisant une condition de cohérence*

$$\sigma_1(B_2)B_1 = \sigma_2(B_1)B_2.$$

Alors toute solution formelle $w(x)$ *du système est dans* $\mathbb{C}(x)^n$*.*

Théorie générale pour deux endomorphismes

Considérons deux endomorphismes σ_1, σ_2, spécifiquement

cas 2S: Deux opérateurs de translation $\sigma_1(x) = x+1$ et $\sigma_2(x) = x+\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorie générale pour deux endomorphismes

Considérons deux endomorphismes σ_1, σ_2, spécifiquement

cas 2S: Deux opérateurs de translation $\sigma_1(x) = x+1$ et $\sigma_2(x) = x+\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

cas 2Q: Deux opérateurs de q-dilation, définis par $\sigma_j(x) = q_j\, x$ avec des nombres complexes q_j multiplicativement indépendants. On suppose que $|q_j| \neq 0$, q_j pas racines de l'unité et $|q_1| \neq 1$.

Théorie générale pour deux endomorphismes

Considérons deux endomorphismes σ_1, σ_2, spécifiquement

cas 2S: Deux opérateurs de translation $\sigma_1(x) = x+1$ et $\sigma_2(x) = x+\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

cas 2Q: Deux opérateurs de q-dilation, définis par $\sigma_j(x) = q_j\, x$ avec des nombres complexes q_j multiplicativement indépendants. On suppose que $|q_j| \neq 0$, q_j pas racines de l'unité et $|q_1| \neq 1$.

cas 2M: Deux opérateurs de Mahler dèfinis par $\sigma_j(x) = x^{q_j}$ avec des entiers q_j multiplicativement indépendants.

Théorie générale pour deux endomorphismes

Considérons deux endomorphismes σ_1, σ_2, spécifiquement

cas 2S: Deux opérateurs de translation $\sigma_1(x) = x+1$ et $\sigma_2(x) = x+\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

cas 2Q: Deux opérateurs de q-dilation, définis par $\sigma_j(x) = q_j\, x$ avec des nombres complexes q_j multiplicativement indépendants. On suppose que $|q_j| \neq 0$, q_j pas racines de l'unité et $|q_1| \neq 1$.

cas 2M: Deux opérateurs de Mahler dèfinis par $\sigma_j(x) = x^{q_j}$ avec des entiers q_j multiplicativement indépendants.

Plus précisément, nous considérons des systèmes

$$\sigma_j(Y) = B_j\, Y,\ j = 1, 2 \tag{4}$$

avec $B_j \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}(x))$ qui sont *cohérents*, c.à.d. B_1 et B_2 satisfont une condition de cohérence

$$\sigma_1(B_2)B_1 = \sigma_2(B_1)B_2. \tag{5}$$

Théorie générale pour deux endomorphismes

Considérons deux endomorphismes σ_1, σ_2, spécifiquement

cas 2S: Deux opérateurs de translation $\sigma_1(x) = x+1$ et $\sigma_2(x) = x+\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

cas 2Q: Deux opérateurs de q-dilation, définis par $\sigma_j(x) = q_j\, x$ avec des nombres complexes q_j multiplicativement indépendants. On suppose que $|q_j| \neq 0$, q_j pas racines de l'unité et $|q_1| \neq 1$.

cas 2M: Deux opérateurs de Mahler dèfinis par $\sigma_j(x) = x^{q_j}$ avec des entiers q_j multiplicativement indépendants.

Plus précisément, nous considérons des systèmes

$$\sigma_j(Y) = B_j\, Y,\ \ j = 1, 2 \tag{4}$$

avec $B_j \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}(x))$ qui sont *cohérents*, c.à.d. B_1 et B_2 satisfont une condition de cohérence

$$\sigma_1(B_2)B_1 = \sigma_2(B_1)B_2. \tag{5}$$

Notons que la condition de cohérence garantie que $\sigma_1(\sigma_2(Z)) = \sigma_2(\sigma_1(Z))$ pour toute solution Z du système (4) dans toute extension de $\mathbb{C}(x)$.

Notre résultat principal pour les endomorphismes est le suivant
Théorème. *Dans les cas 2S et 2Q, le système*

$$\sigma_j(Y) = B_j Y,\ j = 1, 2 \tag{6}$$

satisfaisant la condition de cohérence

$$\sigma_1(B_2)B_1 = \sigma_2(B_1)B_2. \tag{7}$$

est équivalent sur $k = \mathbb{C}(x)$ *à un système*

$$\sigma_j(Z) = \tilde{B}_j Z,\ j = 1, 2 \tag{8}$$

où les $\tilde{B}_j$, $j = 1, 2$, *sont constantes, inversibles et commutent, c.à.d. il existe des matrices constantes* $\tilde{B}_j \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, $j = 1, 2$, *avec* $\tilde{B}_2 \tilde{B}_1 = \tilde{B}_1 \tilde{B}_2$ *et* $G \in \mathsf{GL}_n(k)$ *telles que* $Z = GY$ *transforme (6) en (8).*

Notre résultat principal pour les endomorphismes est le suivant

Théorème. *Dans les cas 2S et 2Q, le système*

$$\sigma_j(Y) = B_j Y,\ j = 1, 2 \tag{6}$$

satisfaisant la condition de cohérence

$$\sigma_1(B_2)B_1 = \sigma_2(B_1)B_2. \tag{7}$$

est équivalent sur $k = \mathbb{C}(x)$ à un système

$$\sigma_j(Z) = \tilde{B}_j Z,\ j = 1, 2 \tag{8}$$

où les $\tilde{B}_j$, $j = 1, 2$, sont constantes, inversibles et commutent, c.à.d. il existe des matrices constantes $\tilde{B}_j \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, $j = 1, 2$, avec $\tilde{B}_2 \tilde{B}_1 = \tilde{B}_1 \tilde{B}_2$ et $G \in \mathsf{GL}_n(k)$ telles que $Z = GY$ transforme (6) en (8).

Dans le cas 2M, le système (6) satisfaisant (7) est équivalent sur $K = \mathbb{C}(\{x^{1/s} \mid s \in \mathbb{N}^*\})$ à un système (8) où les $\tilde{B}_j$, $j = 1, 2$, sont constantes, inversibles et commutent.

Présentons quelques conséquences du théorème. Elles concernent un système

$$\sigma_j^{m_j}(f(x)) + b_{j,m_j-1}(x)\sigma_j^{m_j-1}(f(x)) + \ldots + b_{j,0}(x)f(x) = 0, \quad (9)$$

$j = 1, 2$, with $b_{j,i}(x) \in \mathbb{C}(x)$.

Présentons quelques conséquences du théorème. Elles concernent un système

$$\sigma_j^{m_j}(f(x)) + b_{j,m_j-1}(x)\sigma_j^{m_j-1}(f(x)) + \ldots + b_{j,0}(x)f(x) = 0, \quad (9)$$

$j = 1, 2$, with $b_{j,i}(x) \in \mathbb{C}(x)$.

Corollaire. *(cas 2S, 2Q, 2M) Si $f(x)$ est une solution formelle de (9) ($f(x) \in \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ resp. $f(x) \in \mathbb{C}[[x^{-1}]][x]$) alors $f(x)$ est rationelle.*

(cas 2M : Adamczewski/Bell 13)

Présentons quelques conséquences du théorème. Elles concernent un système

$$\sigma_j^{m_j}(f(x)) + b_{j,m_j-1}(x)\sigma_j^{m_j-1}(f(x)) + \ldots + b_{j,0}(x)f(x) = 0, \quad (9)$$

$j = 1, 2$, with $b_{j,i}(x) \in \mathbb{C}(x)$.

Corollaire. *(cas 2S, 2Q, 2M) Si $f(x)$ est une solution formelle de (9) ($f(x) \in \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ resp. $f(x) \in \mathbb{C}[[x^{-1}]][x]$) alors $f(x)$ est rationelle.*
(cas 2M : Adamczewski/Bell 13)

Corollaire. *(cas 2S) Si $f(x)$ est une fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ et solution du système (9) et si α est réel ou $f(x)$ n'admet qu'un nombre fini de pôles, alors*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{I} r_i(x) e^{\alpha_i x} \quad (10)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $r_i(x) \in \mathbb{C}(x)$.
(variantes pour solutions entières : Bézivin/Gramain, Brisebarre/Habsieger)

Corollaire. *(cas 2Q) Si $f(x)$ est une fonction méromorphe sur la surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ du logarithme, si $f(x)$ satisfait un système*

$$\sigma_j^{m_j}(f(x)) + b_{j,m_j-1}(x)\sigma_j^{m_j-1}(f(x)) + \ldots + b_{j,0}(x)f(x) = 0, \quad (11)$$

et si α est réel ou $f(x)$ n'admet qu'un nombre fini de pôles, alors

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^{I} r_{ij}(x)x^{\alpha_i}\log(x)^j \qquad (12)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $r_{ij} \in \mathbb{C}(x)$.

Corollaire. *(cas 2Q) Si $f(x)$ est une fonction méromorphe sur la surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ du logarithme, si $f(x)$ satisfait un système*

$$\sigma_j^{m_j}(f(x)) + b_{j,m_j-1}(x)\sigma_j^{m_j-1}(f(x)) + \ldots + b_{j,0}(x)f(x) = 0, \quad (11)$$

et si α est réel ou $f(x)$ n'admet qu'un nombre fini de pôles, alors

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^{I} r_{ij}(x)x^{\alpha_i}\log(x)^j \quad (12)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $r_{ij} \in \mathbb{C}(x)$.

Corollaire. *(cas 2M) Si $f(x)$ est une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$ qui résoud un système (11) alors*

$$f(x) = \sum_{i=-I}^{I} r_i(x)(\log(x))^i \quad (13)$$

avec $r_i \in \mathbb{C}(\{x^{1/\ell} \mid \ell \in \mathbb{N}^*\})$.

Théorie générale pour des systèmes mixtes

Soit δ une dérivation sur $k = \mathbb{C}(x)$ et σ un $\mathbb{C}$-algebra endomorphisme de k. Nous supposons qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $\delta\sigma = \mu\,\sigma\delta$.

Théorie générale pour des systèmes mixtes

Soit δ une dérivation sur $k = \mathbb{C}(x)$ et σ un $\mathbb{C}$-algebra endomorphisme de k. Nous supposons qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $\delta\sigma = \mu\,\sigma\delta$.

Nous considérons trois cas de couples (δ, σ) dans la suite.

cas S: La dérivation est $\delta = d/dx$ et σ est la translation définie par $\sigma(x) = x + 1$. Ici $\mu = 1$.

Théorie générale pour des systèmes mixtes

Soit δ une dérivation sur $k = \mathbb{C}(x)$ et σ un $\mathbb{C}$-algebra endomorphisme de k. Nous supposons qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $\delta\sigma = \mu\,\sigma\delta$.

Nous considérons trois cas de couples (δ, σ) dans la suite.

cas S: La dérivation est $\delta = d/dx$ et σ est la translation définie par $\sigma(x) = x + 1$. Ici $\mu = 1$.

cas Q: La dérivation est $\delta = x\,d/dx$ et σ est l'opérateur de q-dilation défini par $\sigma(x) = q\,x$ où $q \neq 0$ n'est pas une racine de l'unité. Ici $\mu = 1$.

Théorie générale pour des systèmes mixtes

Soit δ une dérivation sur $k = \mathbb{C}(x)$ et σ un $\mathbb{C}$-algebra endomorphisme de k. Nous supposons qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $\delta\sigma = \mu\,\sigma\delta$.

Nous considérons trois cas de couples (δ, σ) dans la suite.

cas S: La dérivation est $\delta = d/dx$ et σ est la translation définie par $\sigma(x) = x + 1$. Ici $\mu = 1$.

cas Q: La dérivation est $\delta = x\,d/dx$ et σ est l'opérateur de q-dilation défini par $\sigma(x) = q\,x$ où $q \neq 0$ n'est pas une racine de l'unité. Ici $\mu = 1$.

cas M: La dérivation est $\delta = x\,d/dx$ et σ est l'opérateur de Mahler défini par $\sigma(x) = x^q$ avec un entier $q \geq 2$. Ici $\mu = q$.

Théorie générale pour des systèmes mixtes

Soit δ une dérivation sur $k = \mathbb{C}(x)$ et σ un $\mathbb{C}$-algebra endomorphisme de k. Nous supposons qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $\delta\sigma = \mu\,\sigma\delta$.

Nous considérons trois cas de couples (δ, σ) dans la suite.

cas S: La dérivation est $\delta = d/dx$ et σ est la translation définie par $\sigma(x) = x + 1$. Ici $\mu = 1$.

cas Q: La dérivation est $\delta = x\,d/dx$ et σ est l'opérateur de q-dilation défini par $\sigma(x) = q\,x$ où $q \neq 0$ n'est pas une racine de l'unité. Ici $\mu = 1$.

cas M: La dérivation est $\delta = x\,d/dx$ et σ est l'opérateur de Mahler défini par $\sigma(x) = x^q$ avec un entier $q \geq 2$. Ici $\mu = q$.

Nous considérons des systèmes

$$\delta(Y) = AY,\ \sigma(Y) = BY \tag{14}$$

avec $A \in \mathsf{gl}_n(k), B \in \mathsf{GL}_n(k)$ qui sont *cohérent*:

$$\delta(B) = \mu\,\sigma(A)B - BA. \tag{15}$$

On dit que (14) est *équivalent* (sur k) à un système

$$\delta(Z) = \tilde{A}Z,\ \sigma(Z) = \tilde{B}Z \tag{16}$$

avec $\tilde{A} \in \mathsf{gl}_n(k), \tilde{B} \in \mathsf{GL}_n(k)$ s'il vient de (16) via une *transformation de gauge* $Z = GY$.Alors

$$\tilde{A} = \delta(G)G^{-1} + GAG^{-1},\ \tilde{B} = \sigma(G)BG^{-1} \tag{17}$$

On dit que (14) est *équivalent* (sur k) à un système

$$\delta(Z) = \tilde{A}Z,\ \sigma(Z) = \tilde{B}Z \tag{16}$$

avec $\tilde{A} \in \mathrm{gl}_n(k), \tilde{B} \in \mathrm{GL}_n(k)$ s'il vient de (16) via une *transformation de gauge* $Z = GY$.

Théorème. *Dans les cas S et Q, le système (14) satisfaisant la condition de cohérence (15) est équivalent sur k à un système (16) où $\tilde{A}, \tilde{B}$ sont constantes et $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$. En plus :*

S: *$\tilde{A}$ est diagonal.*

Q: *Si λ_1, λ_2 sont des valeurs propres de $\tilde{A}$, alors $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

On dit que (14) est *équivalent* (sur k) à un système

$$\delta(Z) = \tilde{A}Z,\ \sigma(Z) = \tilde{B}Z \tag{16}$$

avec $\tilde{A} \in \mathsf{gl}_n(k), \tilde{B} \in \mathsf{GL}_n(k)$ s'il vient de (16) via une *transformation de gauge $Z = GY$.*

Théorème. *Dans les cas S et Q, le système (14) satisfaisant la condition de cohérence (15) est équivalent sur k à un système (16) où $\tilde{A}, \tilde{B}$ sont constantes et $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$. En plus :*
S: *$\tilde{A}$ est diagonal.*
Q: *Si λ_1, λ_2 sont des valeurs propres de $\tilde{A}$, alors $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Théorème. *Dans le cas M, le système (14) satisfaisant la condition de cohérence (15) est équivalent sur $K = \mathbb{C}(\{x^{1/\ell} \mid \ell \in \mathbb{N}^*\})$ à un système (16) avec $\tilde{A} \in \mathsf{gl}_n(\mathbb{C})$ constante, nilpotente et $\tilde{B} \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ constante, $q\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$.*

Corollaire. *(RS-MS, Ramis 92, Bézivin 94) Soit* $f(x)$ *solution d'une EDO linéaire et d'une équation aux* σ*-différences*

$$\delta^n(f(x)) + a_{n-1}(x)\delta^{n-1}(f(x)) + \ldots + a_0(x)f(x) = 0 \text{ and}$$
$$\sigma^m(f(x)) + b_{m-1}(x)\sigma^{m-1}(f(x)) + \ldots + b_0(x)f(x) = 0,$$

avec $a_i(x), b_i(x) \in \mathbb{C}(x)$.
Si $f(x)$ *est une série formelle (dans* $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ *resp.* $\mathbb{C}[[x^{-1}]][x]$*) alors* f *est rationelle.*

L'exposé est basé sur deux travaux avec Michael Singer :

Mahler equations and rationality, `https://arxiv.org/abs/1605.08830`

Consistent systems of linear differential and difference equations, `https://arxiv.org/abs/1605.02616`, à paraitre dans le Journal de l'EMS.